ジョージァイ

物理学におけるリー代数

— アイソスピンから統一理論へ —

原著第２版

九後　汰一郎 訳

物理学叢書
107

吉岡書店

物理学におけるリー代数

—— アイソスピンから統一理論へ ——

原著第2版

H. ジョージァイ 著

九後 汰一郎 訳

物理学叢書

107

吉 岡 書 店

Lie Algebras in Particle Physics

Second Edition

Library of Congress Catalog Card Number: 99-64878
ISBN: 0-7382-0233-9

Perseus Books is a member of the Perseus Books Group.

2 3 4 5 6 7 8 9— —03 02 01 00 99

Find us on the World Wide Web at
http://www.perseusbooks.com

PERSEUS
POD
ON DEMAND

改訂版の序文

Lie Algebras in Particle Physics (邦訳: 物理学におけるリー代数) は大変好評を博してきた本である. 私は長い間改訂版を作る誘惑に抗してきたが, ついに作ることにした. というのは, 本に含めるべき新しい材料がたくさん現れ, すこし違った風に言い直したいこともたくさんある, とわかったからである. しかし一方, 第一版の良かった点はあまりたくさんやらなかったという事である. その題材は, 量子力学の十分な知識がある学生には, 一学期の課程でやれる量である. 新しい題材を加えながら, この良い点を保つ試みとして, 私は, 最初読むときには跳ばしても構わないいくつかのセクションに印を付けることにした. そういう節や, それに関する問題には, タイトルに * 印を付けた.

私の見方は偏っているかもしれない. が, この題材は教えるのも, 習うのも, すばらしく楽しいものだ. 私はこれを公式には大学院の授業の教科書として使っているが, ハーバードの多くの進んだ学部学生にも首尾良く読まれている. その際に重要な必要条件は, 量子力学と線形代数の十分な予備知識である.

私が初めてこの題材を改訂し LaTeX でタイプし始めてから 5 年以上が経っている. 当時から今までの間に, 大変多くの学生がこの進化してゆく原稿を教科書として使ってきた. 誤植から文法, 教え方に至るまで, 多様な提言・意見をいただいたことに対し彼らの多くに感謝している.

いつものように, 私の家族がこの間ずっと私に我慢してくれた事に対し, この上なく感謝している. また, 人を鼓舞するエピローグを書く際に彼らが助けてくれたことにも感謝したい.

ハワード　ジョージァイ
ケンブリッジ, マサチューセッツ
1999 年 5 月

目 次

なぜ群論か?

群論は，対称性の学問であり，途方もなく労力を軽減してくれる道具である．それを使うと，物理的な対象の系がどういうものかを厳密には理解していない時でさえ，その系についての興味ある事を，時としてたいへん詳しい事を，言うことができる．私は十代の頃，アーサー S. エディントン卿による「群論」についての小論を読んだことがあるが，その中の一節がもう 30 年以上ものあいだ頭にこびりついて離れない:[1]

> 演算が，それらの作用する対象と同じくらいわからないような，超数学と，それらの演算を行っているときに自分がしていることをわかっていない超数学者とが，我々には必要である．そのような超数学が「群論」である．

本書で私は，エディントンが少なくとも物理学に関する限り少しばかり間違った点を含んでいる，ということを読者に納得させようと思う．物理学者が対称性から情報を抽出しようとする際に使うのは，たいていは群そのものではなく，群の表現である．これの意味している正確な内容は，読者が読み進むにつれて詳しくわかってくるだろう．私が読者にこの本から得てほしいと期待することは，特に量子力学の学習において，労力を軽減する道具として群の表現を使うために十分なだけの，群とリー代数とその表現の理論である．

物理と数学の間を交互に行き来し，各々の問題をいくつかの異なった角度から考察する，ということをこの本の基本的なやり方としたい．いろいろな技術を一度に用いることにより，より効率的に問題を解くことができ，同時にそれらの技術のそれぞれをより深く理解することができる，ということを学んで欲しい．

[1]**The World of Mathematics** (James R. Newman 編，Simon & Schuster，New York, 1956) より．

第1章

有限群

有限群の理論の紹介から始めよう．ここでは，この膨大なそして美しい主題の自己充足した扱いを与えることは意図していない．我々は，コンパクト・リー代数を理解するのに役立つ2,3の簡単な事実だけに集中する．たくさんの定義を紹介し，時々は証明を与えるが，多くは読者にその証明を任せる．

1.1 群と表現

群 (group) G は，その任意の (順序付きの) 一対の元に対し，次の性質を満たす第3の元を割り当てる規則を持った集合である:

(1.A.1) $f, g \in G$ ならば，$h = fg \in G$.

(1.A.2) $f, g, h \in G$ に対して，$f(gh) = (fg)h$.

(1.A.3) 単位元 e が存在し，全ての元 $f \in G$ に対し，$ef = fe = f$.

(1.A.4) 任意の元 $f \in G$ に，その逆元 f^{-1} が存在し，$ff^{-1} = f^{-1}f = e$.

すなわち，群というのは，$\forall g_1, g_2 \in G$ に対して $g_1 g_2$ を指定する掛け算の表である．群の元が離散的な場合は，掛け算の表を次のような形に書くことができる．

$$
\begin{array}{c||c|c|c|c}
\backslash & e & g_1 & g_2 & \cdots \\
\hline\hline
e & e & g_1 & g_2 & \cdots \\
\hline
g_1 & g_1 & g_1 g_1 & g_1 g_2 & \cdots \\
\hline
g_2 & g_2 & g_2 g_1 & g_2 g_2 & \cdots \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
\tag{1.1}
$$

G の**表現** (representation) とは，G の元を線形演算子に写す写像 D で，次の性質を満たすものを言う:

1.B.1 $D(e) = 1$．ただし，1 は線形演算子が作用している空間での単位演算子である．

1.B.2 $D(g_1)D(g_2) = D(g_1 g_2)$． 言い換えると，群の掛け算則が，線形演算子の作用している空間での自然な掛け算に写される．

1.2 例 - Z_3

群が有限個の元からなる場合，群は**有限**と呼び，そうでない場合，**無限**という．有限群 G の元の個数を，G の**位数** (order) という．ここに位数 3 の群を一つ示そう:

\	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

(1.2)

これは位数 3 の巡回群 Z_3 である．この掛け算表の各行と各列が，群の各元をちょうど一回ずつ含んでいることに注意せよ．このことは，逆元が存在するために成り立たねばならない．

アーベル群 (Abelian group) とは，掛け算則が可換な群である ——

$$g_1 g_2 = g_2 g_1 \,. \tag{1.3}$$

明らかに，Z_3 はアーベル群である．

次に示すのは，Z_3 の一つの表現である．

$$D(e) = 1\,, \quad D(a) = e^{2\pi i/3}\,, \quad D(b) = e^{4\pi i/3} \tag{1.4}$$

ある表現の**次元** (dimension) とは，それが作用する空間の次元をいう —— 表現 (1.4) は 1 次元である．

1.3　正則表現

Z_3 のもう一つ別の表現をあげよう:

$$D(e)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad D(a)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$
$$D(b)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} \tag{1.5}$$

この表現は，次のやり方で，掛け算の表から直接構成することが出来る．群の元自身をベクトル空間の正規直交基底 $|e\rangle$, $|a\rangle$, $|b\rangle$ に採る．そして

$$D(g_1)|g_2\rangle=|g_1g_2\rangle \tag{1.6}$$

を定義する．読者はこれが表現になっていることを確かめられたい．これは**正則**表現 (regular representation) と呼ばれる．明らかに，正則表現の次元は群の位数である．(1.5) の行列は，そこで次のように構成されたものである．

$$|e_1\rangle\equiv|e\rangle\,,\quad |e_2\rangle\equiv|a\rangle\,,\quad |e_3\rangle\equiv|b\rangle \tag{1.7}$$
$$[D(g)]_{ij}=\langle e_i|D(g)|e_j\rangle \tag{1.8}$$

行列は線形演算子の**行列要素**である．(1.8) 式は，演算子と行列とを双方向に関係づける，簡単な，しかし非常に一般的で非常に重要な方法を与える．それは単に正則表現だけではなく，任意の表現に適用できる．我々はしょっちゅうそれを使うだろう．基本的な考え方は単に中間状態の完全系を挿入するだけのことである．演算子の積に対応する行列は，演算子に対応した行列の (行列としての) 積である ——

$$\begin{aligned}[D(g_1g_2)]_{ij}&=[D(g_1)D(g_2)]_{ij}=\langle e_i|D(g_1)D(g_2)|e_j\rangle\\&=\sum_k\langle e_i|D(g_1)|e_k\rangle\,\langle e_k|D(g_2)|e_j\rangle=\sum_k[D(g_1)]_{ik}[D(g_2)]_{kj}\end{aligned} \tag{1.9}$$

この正則表現の構成法は全く一般的で任意の有限群に使える．任意の有限群に対し，基底ベクトルが群の元でラベルされるベクトル空間を定義できる．そのとき (1.6) 式が正則表現を定義する．我々はこの章でさまざまな群の正則表現を見ることになる．

1.4　既約表現

群の表現という考えを非常に強力なものとしているのは，線形空間において表現されているという事実である．さらに線形空間に関してすばらしい点は自由に線形変換を行ってより便利なように状態を表わすことができるということである．その変換に逆変換が存在する限り，新しい状態はもとの状態と全く同様に良い．そのような状態の変換は，線形演算子に対し**相似変換** (similarity transformation) を引き起こし，その結果，我々はいつも次の形の新しい表現を作ることが出来る:

$$D(g) \to D'(g) = S^{-1}D(g)S \tag{1.10}$$

相似変換の形から明らかに，新しい演算子の組はもとの組と同じ掛け算則を持ち，したがって，D が表現である限り D' も表現となる．D' と D とは，単に基底の採り方が違うだけなので，**同値な**表現と呼ばれる．

($O^\dagger = O^{-1}$ を満たす) **ユニタリー**演算子 O は 特に重要である．全ての $D(g)$ がユニタリー行列の時，表現はユニタリーという．上で議論した表現は両方ともユニタリーである．有限群の表現は全てユニタリー表現と同値であることがわかる．(我々はこれを後で証明する − それは易しい簡潔な証明だ．)

部分空間の任意のベクトルにどの $D(g)$ が作用してもその部分空間に入っている時，その部分空間を**不変部分空間** (invariant subspace) と呼ぶ．ある表現 D が不変部分空間を持つ時，その表現は**可約** (reducible) であるという．その部分空間への射影演算子 P を使えば，この条件は次のように書ける．

$$PD(g)P = D(g)P \qquad \forall g \in G \tag{1.11}$$

例えば，Z_3 の正則表現 (1.5) は，射影演算子

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

で射影される不変部分空間を持つ．実際 $\forall g$ に対し $D(g)P = P$ だから．表現をその不変部分空間に制限したものは，それ自身一つの表現である．今の場合，これは $D(g) = 1$ の**自明な表現** (trivial representation) となっている．(自明な表現，$\forall g$ に対し $D(g) = 1$，は常に一つの表現であり，どの群にも存在する．)

表現は，可約でないとき，既約と呼ぶ．

行列要素が次の形を持つ表現と同値な場合，表現は**完全可約**であるという．

$$\begin{pmatrix} D_1(g) & 0 & \cdots \\ 0 & D_2(g) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

ここで $D_j(g)$ は $\forall j$ に対し既約である．この形は**ブロック対角な形**と呼ばれる．

ブロック対角な形をした表現は，部分表現 $D_j(g)$ の**直和** (direct sum) と言う：

$$D_1 \oplus D_2 \oplus \cdots \tag{1.14}$$

表現をブロック対角な形に持って行くことで，我々はもとの表現をその既約な成分の直和へ分解している事になる．だから完全可約性の定義の別な言い方は，**完全可約な表現とは既約な表現の直和に分解できるもの**，ということである．これは重要な考え方であり，しばしば用いるだろう．

のちに我々は有限群の任意の表現が完全可約であることを示す．例えば，(1.5) に対して，相似変換を

$$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

と採ろう．ただし

$$\omega = e^{2\pi i/3} \tag{1.16}$$

である．そうすると，

$$D'(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D'(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$$
$$D'(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

1.5　変換群

物理系の変換には自然な掛け算則が存在する．g_1 と g_2 を二つの変換とすれば，g_1g_2 は，先ず g_2 を行い，次に g_1 を行うことを意味する．ただし，合成則を我々

が今やったように右から左へと定義するか，左から右へとするかは全くの約束事であることに注意しておきたい．どちらでも，完全に矛盾のない変換群の定義を与える．

この変換が量子力学系の対称性である場合には，変換はそのヒルベルト空間を等価なヒルベルト空間に移す．各々の群の元 g に対し，ヒルベルト空間を等価なそれに写すユニタリー演算子 $D(g)$ がある．変換された量子状態は変換された物理系を表すので，これらのユニタリー演算子は変換群の表現をなしている．かくして対称性の任意の集合に対し，ヒルベルト空間上の対称性の群の表現が存在する．―― ヒルベルト空間はその群のある表現にしたがって変換する，と言う．さらにまた，変換された状態はもとのそれと同じエネルギーを持っているので，$D(g)$ はハミルトニアンと交換する：$[D(g), H] = 0$．のちに詳しく見るように，このことは我々がいつもエネルギー固有状態を群の既約表現として変換するように選ぶことが出来る事を意味している．簡単な例でこのことを考察しておくことは有益である．

1.6　応用：量子力学におけるパリティ

パリティとは，鏡映の演算である．二回鏡映を行えば最初の状態に戻る．p をパリティ変換を表す群の元とすれば，このことは $p^2 = e$ を意味する．よって，この変換は，(何もしない，という）恒等変換 e と共に，次の掛け算則を持つ大変簡単な群をなす：

$\backslash$	e	p
e	e	p
p	p	e

(1.18)

これは Z_2 と呼ばれる群である．この群には既約表現が二つしかない：一つは，自明な表現 $D(p) = 1$ と，もう一つは $D(e) = 1$，$D(p) = -1$ となる表現である．任意の表現は完全可約であり，特に，任意のパリティ不変な系のヒルベルト空間は $D(p)$ が 1 あるいは -1 と表される既約表現のように振る舞う状態に分解できる．さらに，$D(p)$ はハミルトニアンと可換なので，$D(p)$ と H は同時に対角化できる．すなわち，各エネルギー固有状態に $D(p)$ のはっきりした値を付与できる．

$D(p)=1$ のエネルギー固有状態は自明な表現にしたがって変換すると言い，$D(p)=-1$ の状態は他方の表現にしたがい変換する．このことは一次元の非相対論的量子力学からおなじみであろう．そこでは，$x=0$ の点に関して対称なポテンシャル中の粒子は，$x\to -x$ の下で（自明な表現に対応した）対称か，さもなくば（$D(p)=-1$ の表現の）反対称の，エネルギー固有状態を持っていた．

1.7　例：S_3

三つの対象上の**置換群** (permutation group) [あるいは**対称群** (symmetric group)] は，S_3 と呼ばれ，単位元と次の元からなる：

$$\begin{gathered} a_1=(1,2,3) \qquad a_2=(3,2,1) \\ a_3=(1,2) \qquad a_4=(2,3) \qquad a_5=(3,1) \end{gathered} \tag{1.19}$$

記号の意味は，a_1 は場所 1，2，3 にあるもの達の巡回置換であり；a_2 は逆向きの反巡回置換である； a_3 は，場所 1，2 にあるものの交換（互換）；などなど．掛け算則は g_1g_2 が，先ず g_2 をやり次に g_1 をやる，という変換則により決まる．それは

\	e	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
e	e	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_1	a_2	e	a_5	a_3	a_4
a_2	a_2	e	a_1	a_4	a_5	a_3
a_3	a_3	a_4	a_5	e	a_1	a_2
a_4	a_4	a_5	a_3	a_2	e	a_1
a_5	a_5	a_3	a_4	a_1	a_2	e

(1.20)

g_1g_2 は，先ず g_1 をやり次に g_2 をやる，ということを意味するように定義することも同等にできた．これら二つのルールは異なる掛け算表を定義する．しかし，両者は群の元の単純なラベル替えにより互いに関係づけられ，同じ群を与えることになる．ここではもう一つの混乱の可能性がある．それは，場所 1，2，3 にある対象達を置換するのか，それとも単に 1，2，3 を三つの対象の名前として扱うのか，である．再びこれらの二つも異なる掛け算表を与えるが，自明な名前の付け替えに過ぎない．前者の方が少し，より物理的であるので，我々は以後そちらの解釈を採る．置換群は物理系の**変換群**の別の例である．

S_3 は，群の掛け算則が非可換なので**非アーベル群** (non-Abelian group) である．我々は，群論を大変おもしろくしているのが，この可換性の欠如であることを見るだろう．

ここで S_3 のユニタリーな既約表現を与える．

$$
\begin{aligned}
D(e) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(a_1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\
D(a_2) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ D(a_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
D(a_4) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ D(a_5) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

興味あることは，既約なユニタリー表現は 2 次元以上であることだ．非アーベル群の表現の少なくともあるものは数ではなく行列でなければならない．行列だけが非アーベル的掛け算則を再現できる．全ての演算子を同時には対角化できない．群の表現論が大きな力を発揮する原因はここにある．

1.8 例：整数の足し算

整数は足し算の下で無限群をなす．

$$xy = x + y \tag{1.22}$$

これはかなり散文的に整数の加法群と呼ばれる．これは無限群なので，掛け算表を書き下すことはできないが，この式のルールがそれを完全に指定している．

ここに一つの表現を与える：

$$D(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

この表現は可約である．が，完全可約ではなく，ユニタリー表現と同値でもないことを読者は示せるだろう．それが可約であることは

$$D(x)P = P \tag{1.24}$$

が

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

に対して成り立つからである．しかし，

$$D(x)(I-P) \neq (I-P) \tag{1.26}$$

であるから，完全可約ではない．

明らかに整数は無限個あるので，整数の加法群は無限群である．有限群に対してはあらゆる表現がユニタリー表現と同値なので，あらゆる可約表現は完全可約である．

1.9　有用な定理

定理 1.1 有限群の表現は全てユニタリー表現に同値である．

証明： $D(g)$ を有限群 G の表現としよう．演算子

$$S = \sum_{g\in G} D(g)^\dagger D(g) \tag{1.27}$$

を作れば，S はエルミートで半正定値である．よって，あるユニタリー行列 U により対角化でき，固有値は非負である：

$$S = U^{-1} d U \tag{1.28}$$

ここで d は対角行列で

$$d = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots \\ 0 & d_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{1.29}$$

$d_j \geq 0\ \forall j$ である． 群の性質により実は全ての d_j が正である．証明 —— 一つの d_j がゼロだと仮定してみよう．そうすると，$S\lambda = 0$ となるベクトル λ があることになる．ところが，

$$\lambda^\dagger S \lambda = 0 = \sum_{g\in G} ||D(g)\lambda||^2 . \tag{1.30}$$

だから，$D(g)\lambda$ は全ての g に対して消えないといけない．これは $D(e)=1$ であ

るからあり得ない．したがって，Sの平方根が作れて，それはエルミートで逆行列がある．

$$X = S^{1/2} \equiv U^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{d_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} U \tag{1.31}$$

Xに逆行列があるのはどのd_jもゼロでないからである．そこで次の表現を定義できる．

$$D'(g) = X\,D(g)\,X^{-1} \tag{1.32}$$

いくぶん驚きであるが，この表現はユニタリーである!

$$D'(g)^\dagger D'(g) = X^{-1} D(g)^\dagger S D(g) X^{-1} \tag{1.33}$$

ところが

$$\begin{aligned} D(g)^\dagger S D(g) &= D(g)^\dagger \Big(\sum_{h\in G} D(h)^\dagger D(h) \Big) D(g) = \sum_{h\in G} D(hg)^\dagger D(hg) \\ &= \sum_{h\in G} D(h)^\dagger D(h) = S = X^2 \end{aligned} \tag{1.34}$$

最後の行では，hが群Gの全ての元を走るとき，hgも全ての元を走ることを使った．証明終．

上で整数の加法群の表現(1.23)が可約だが完全可約でない例となっていることを見た．不変部分空間への射影演算子Pが存在したが，$(1-P)$は不変部分空間への射影演算子になっていなかった．そういうことはユニタリー表現の場合不可能であり，よって有限群の表現は常に完全可約である．そのことを証明しよう．

定理 1.2 有限群のあらゆる表現は完全可約である．

証明： 前の定理により，ユニタリー表現を考えれば十分である．表現が既約なら，それはすでにブロック対角の形なので証明は終わっている．可約ならば，$PD(g)P = D(g)P \ \forall g \in G$となるようなある射影演算子$P$が存在する．これは$P$が不変部分空間であるという条件である．これのダガーをとれば，$PD(g)^\dagger P = PD(g)^\dagger \ \forall g \in G$．ところが$D(g)$はユニタリーであるから，$D(g)^\dagger = D(g)^{-1} = D(g^{-1})$．そして，$g$が$G$全体を走れば，$g^{-1}$も全体を走るので，これから$PD(g)P = PD(g) \ \forall g \in G$が従う．しかし，これは$(1-P)D(g)(1-P) =$

$D(g)(1-P)\ \forall g \in G$ を意味しているので，$1-P$ はある不変部分空間への射影演算子となる．よってこの帰納法を続けることができて，最終的には表現を完全に既約な所にまで帰着させられる．

1.10 部分群

ある群 H は，それに属する元が全て群 G の元であるとき，G の**部分群** (subgroup) と呼ばれる．単位元（だけからなる集合）および G 自身は，G の**自明な部分群** (trivial subgroup) である．多くの群は**非自明な部分群** (単に G や $\{e\}$ 以外の部分群をそう呼ぶ) も含んでいる．例えば，置換群 S_3 は元 $\{e, a_1, a_2\}$ からなる Z_3 部分群を含む．

部分群を使えば群の元を剰余類と呼ばれる部分集合に分けることができる．**群 G における部分群 H の右剰余類** (right-coset) とは，ある一つの G の元に右から H の元達を作用させて得られる元の集合，すなわち，ある固定した元 g に対して gH の形の全ての元の集合である．左剰余類も同様に定義する[1]．

例えば，$\{a_3, a_4, a_5\}$ は上の (1.20) の S_3 群における Z_3 の剰余類である．各々の剰余類の中の元の数は，H の位数である．G の各元は，一つのそして唯一の剰余類に属する．したがって，有限群に対しては，H の位数は G の位数の約数でなければならない．

各剰余類を一つの元と見なすことによって定義される**商空間**，G/H (coset space) を考えることが有用な場合もある．

どの $g \in G$ に対しても次の式が成り立つ時，G の部分群 H は**不変部分群** (invariant subgroup) あるいは**正規部分群** (normal subgroup) と呼ぶ．

$$gH = Hg \tag{1.35}$$

この式は，任意の $g \in G$ と $h_1 \in H$ に対して，$h_1 g = g h_2$，あるいは $g h_2 g^{-1} = h_1$ となる $h_2 \in H$ がある，ということの略記である．自明な部分群 $\{e\}$ と G はどの群の場合も不変である．(1.20) の S_3 群の部分群 Z_3 が不変であることは，それほど自明ではないが成り立っている．(このことは直接計算で確かめることもできるし，Z_3 の元が偶数回の互換を含む置換の全てであることに注意しても分かる．)

[1]（訳者注）原著の剰余類の右左の呼び方が，数学の通常の定義と逆であったので和訳では通常のものに直しておいた．

しかし集合 $\{e, a_4\}$ は G の部分群ではあるが，不変ではない．$a_5\{e, a_4\} = \{a_5, a_1\}$ だが，$\{e, a_4\}a_5 = \{a_5, a_2\}$.

H が不変な場合は，商空間 G/H を群と見なすことができる．G における掛け算則が剰余類 Hg の間の自然な掛け算則を与える：

$$(Hg_1)(Hg_2) = (Hg_1Hg_1^{-1})(g_1g_2) \tag{1.36}$$

H が不変だと $Hg_1Hg_1^{-1} = H$ なので，二つの剰余類の中の元の積は皆代表元の積を代表元とする剰余類に属す．この場合，商空間 G/H は，**H による G の因子群** (factor group) と呼ばれる．

因子群 S_3/Z_3 は何になるだろうか？ 答えは Z_2 である．

群 G の**中心** (center) とは，G の全ての元と可換な G の元全ての集合である．中心は常に G のアーベル不変部分群である．しかしながら，それは単位元のみや群全体といった自明な場合もある．

不変部分群の考えに関連した，のちに役に立つ，一つの別な概念がある．部分群が不変であるための条件が次のように書けることに注意する．

$$gHg^{-1} = H \quad \forall g \in G \tag{1.37}$$

これは我々に同じ条件を満たす部分群でなく集合を考えることを示唆する．

$$g^{-1}S\,g = S \quad \forall g \in G \tag{1.38}$$

そのような集合は**共役類** (conjugacy class) と呼ばれる．のちに我々は，共役類と既約表現が一対一の対応を持つことを見るだろう．共役類の和集合となる部分群は不変である．

例 ——

S_3 の共役類は，$\{e\}$，$\{a_1, a_2\}$ および $\{a_3, a_4, a_5\}$.

一つの固定した g に対する写像

$$G \to gGg^{-1} \tag{1.39}$$

もまたおもしろい．これは**内部自己同型**と呼ばれる．**同型写像** (isomorphism) とはある群から別の群への一対一の写像で掛け算則を保つものである．**自己同型** (automorphism) とは，ある群から自分自身への掛け算則を保つ一対一写像であ

る．(1.39) が自己同型であることは簡単に分かる．$g^{-1}g_1g\,g^{-1}g_2g = g^{-1}g_1g_2g$ だからそれは掛け算則を保つ．$g^{-1}g_1g = g^{-1}g_2g \Rightarrow g_1 = g_2$ だから一対一である．(1.39) の形の自己同型は，g が群の元の場合，**内部自己同型** (inner automorphism) と呼ばれる．**外部自己同型** (outer automorphism) とは，群のどの元 g を用いても $g^{-1}Gg$ とは書けない自己同型である．

1.11　Schur の補題

定理 1.3 **D_1 と D_2 が互いに同値でない既約表現としたとき，$\forall g \in G$ に対し $D_1(g)A = AD_2(g)$ が成立すれば $A = 0$ である．**

証明： これは **Schur の補題**の一部である．先ず初めに $A|\mu\rangle = 0$ となるベクトル $|\mu\rangle$ があったと仮定しよう．そうすると，A の右からかかって消えるような部分空間へのゼロでない射影演算子 P が存在する．ところが，この部分空間は表現 D_2 に関して不変である；なぜなら

$$AD_2(g)P = D_1(g)AP = 0 \quad \forall g \in G \tag{1.40}$$

だからである．

しかし D_2 は既約だから，P は全空間への射影でなければならず，A は消えていなければならない．すなわち，もし A が一つの状態を消しているなら全てを消さねばならない．同様な議論で，A の左からかかって消えるベクトル $\langle\nu|$ があっても，A が消えていることが言える．

どちら側からも A を消すベクトルが存在しなければ，それは逆元の存在する正方行列でなければならない．正方でないといけないのは，例えば，列数の方が行数より大きいとすると，各行（の転置ベクトル）達は状態の完全系を張り得なくて，右からかかって A を消すベクトルが存在することになるからである．正方行列はその行列式が消えない限り逆元が存在する．行列式が消える場合は，斉次線形方程式系

$$A|\mu\rangle = 0 \tag{1.41}$$

は，自明でない解を持ち，再び A を消すベクトルがあることを意味する．ところが A が逆元のある正方行列ならば，

$$A^{-1}D_1(g)A = D_2(g) \quad \forall g \in G \tag{1.42}$$

であるから，D_1 と D_2 は同値になって，仮定に反する．証明終．

Schur の補題のより重要な半分は，上の D_1 と D_2 が互いに同値な場合に適用されるものである．この場合，簡単な基底の取り替えを行うことによって $D_1 = D_2 = D$ ととることができる．Schur の補題の残りの半分は次のようになる．

定理 1.4 **D が有限次元の既約表現の場合，$\forall g \in G$ に対し $D(g)A = AD(g)$ が成り立てば $A \propto I$ である．**

言葉で言えば，もしある行列が有限次元既約表現の全ての元と可換ならば，それは単位行列に比例する，という事である．

証明： ここで有限次元表現に限ったことが重要であること注意しよう．有限次元の行列は，特性方程式 $\det(A - \lambda I) = 0$ が少なくとも一つは根を持つので，少なくとも一つは固有値を持つ．そうすると，固有ベクトル $|\mu\rangle$ の成分に対する斉次線形方程式を解くことができる．ところがその時，$D(g)(A - \lambda I) = (A - \lambda I)D(g)\ \ \forall g \in G$ で，$(A - \lambda I)|\mu\rangle = 0$．よって，前の定理の証明に使ったのと同じ議論により $(A - \lambda I) = 0$ が出る．証明終．

Schur の補題の一つの帰結は，既約表現の基底の状態の形が本質的に一意的であることである．実際定理 1.4 を次の形に書き換えることができる：任意の既約表現 D に対して

$$A^{-1}D(g)A = D(g) \quad \forall g \in G \Rightarrow A \propto I \tag{1.43}$$

これは，D の形を一旦決めれば，状態に対して自明でない相似変換をする自由度がもはやないことを示している．やれる唯一のユニタリー変換は全ての状態に共通の位相因子を掛けることだけである．

量子力学において，Schur の補題は，対称性の変換の下で不変な観測可能量に対応した任意の演算子の行列要素に対し大変強い結論を与える．なぜなら行列要素 $\langle a, j, x|O|b, k, y\rangle$ は (1.40) における A と同じ役を果たすからである．これを見るため，ヒルベルト空間の完全な既約分解を考えよう．対称性の群はユニタリー表現

$$g \to D(g) \quad \forall g \in G \tag{1.44}$$

に写され，この表現 D は，量子力学系の全ヒルベルト空間上に働く（一般には大変可約な）G のユニタリー表現である．しかし表現が完全に可約なら，D がブ

ロック対角な形をとる基底を選べて，各々のブロックはGのユニタリー既約表現に対応する，という事を我々は知っている．正規直交基底の状態は，

$$|a, j, x\rangle \tag{1.45}$$

と記し，

$$\langle a, j, x \mid b, k, y\rangle = \delta_{ab}\,\delta_{jk}\,\delta_{xy} \tag{1.46}$$

を満たす．ここに，aは既約表現のラベルで，$j = 1 \sim n_a$はその表現内の状態をラベルし，xは何であれ存在する他の物理的パラメータを表す．

この扱いには，我々がそれについて言及することなくいつも置いている重要な暗黙の仮定が存在する．基底に現れる各々の既約表現aは，何度現れても同じ表現行列$D_a(g)$で記述される，という事を仮定している．言い換えれば，我々は各々の既約表現に対してある正準形を選んでおり，それを専一的に用いている．

この特殊な基底では，$D(g)$の行列要素は

$$\langle a, j, x|\, D(g)\, |b, k, y\rangle = \delta_{ab}\,\delta_{xy}\,[D_a(g)]_{jk} \tag{1.47}$$

これは単に(1.13)の書き換えで，行列の代わりにあらわな添え字を用いただけである．さて我々は，両辺に中間状態の完全系

$$I = \sum_{a,j,x} |a, j, x\rangle\langle a, j, x| \tag{1.48}$$

を挿入して，この基底での表現Dを書くことにより，我々の扱いが意味をなすことをチェックできる．実際

$$\begin{aligned} D(g) &= \sum_{a,j,x} |a, j, x\rangle\langle a, j, x|\, D(g) \sum_{b,k,y} |b, k, y\rangle\langle b, k, y| \\ &= \sum_{\substack{a,j,x \\ b,k,y}} |a, j, x\rangle\, \delta_{ab}\,\delta_{xy}\,[D_a(g)]_{jk}\,\langle b, k, y| \\ &= \sum_{a,j,k,x} |a, j, x\rangle\; [D_a(g)]_{jk}\,\langle a, k, x| \end{aligned} \tag{1.49}$$

と書ける．これはブロック対角な形の表現の別な書き方である．もしある特定の既約表現がDに一回だけ現れるなら，その状態をラベルするx変数は実際必要なかった，ことに注意しよう．しかし典型的には，完全な量子力学のヒルベルト空間において，各既約表現は多数回現れ，そこで物理的x変数は同じ対

称性の特性を持つが物理は異なる状態を区別する．しかし，ここで重要な点は，(1.47) における物理への依存性はかなり自明である．―― 単に状態が正規直交だと言うのみ ―― 群論は全く x や y に依存しない．

対称性の変換の下では，状態は

$$|\mu\rangle \to D(g)\,|\mu\rangle \qquad \langle\mu| \to \langle\mu|\,D(g)^\dagger \tag{1.50}$$

と変換するので，演算子は，全ての行列要素が変わらないように，

$$O \to D(g)\,O\,D(g)^\dagger \tag{1.51}$$

と変換する．それゆえ不変な観測量は

$$O \to D(g)\,O\,D(g)^\dagger = O \tag{1.52}$$

を満たし，これは O が $D(g)$ と可換であることを意味する：

$$[O, D(g)] = 0 \quad \forall g \in G\,. \tag{1.53}$$

このとき，我々は行列要素

$$\langle a, j, x|O|b, k, y\rangle \tag{1.54}$$

に対し，次のような議論で制限を付けることができる：

$$\begin{aligned} 0 &= \langle a, j, x|[O, D(g)]|b, k, y\rangle \\ &= \sum_{k'} \langle a, j, x|O|b, k', y\rangle\langle b, k', y|D(g)|b, k, y\rangle \\ &\quad - \sum_{j'} \langle a, j, x|D(g)|a, j', x\rangle\langle a, j', x|O|b, k, y\rangle \end{aligned} \tag{1.55}$$

ここで，$D(g)$ の行列要素が物理に自明な依存性しか持たないということを表す式（1.47）を用いて書き直すと

$$\begin{aligned} 0 &= \langle a, j, x|[O, D(g)]|b, k, y\rangle \\ &= \sum_{k'} \langle a, j, x|O|b, k', y\rangle [D_b(g)]_{k'k} \\ &\quad - \sum_{j'} [D_a(g)]_{jj'} \langle a, j', x|O|b, k, y\rangle \end{aligned} \tag{1.56}$$

よって，行列要素（1.54）は Schur の補題の仮定を満たし，$a \neq b$ ならば，消えなければならない．$a = b$ ならば，それは単位行列（添え字に関して，すなわち

δ_{jk}）．しかしながら対称性は物理の添え字，x と y への依存性については何も教えてくれない．かくして我々は次のように書くことができる．

$$\langle a, j, x|O|b, k, y\rangle = f_a(x, y)\,\delta_{ab}\,\delta_{jk} \tag{1.57}$$

この式の重要性は物理がひとえに関数 $f_a(x, y)$ に含まれているという点にある．—— 群論のラベルへの依存性は対称性で完全に決まる．後に見るように，これは大変強力であり得る．これは Wigner-Eckart 定理の簡単な例であり，我々は後にその定理をもっとはるかに一般的に議論する．

1.12　* 直交関係式

定理 1.1 の証明で用いたのと同様な，群の元にわたる総和というものは，Schur の補題と一緒に用いて，既約表現のもっと注目すべきいくつかの特質を示すのにも使える．（"ダイアディック" の記号で書いた）次の線形演算子を考えよう．

$$A^{ab}_{j\ell} \equiv \sum_{g\in G} D_a(g^{-1})|a, j\rangle\langle b, \ell|D_b(g) \tag{1.58}$$

ここに D_a と D_b は G の有限次元の既約表現である．さて，見てみよう．

$$\begin{aligned}
D_a(g_1)A^{ab}_{j\ell} &= \sum_{g\in G} D_a(g_1)D_a(g^{-1})|a, j\rangle\langle b, \ell|D_b(g) &(1.59)\\
&= \sum_{g\in G} D_a(g_1 g^{-1})|a, j\rangle\langle b, \ell|D_b(g) &(1.60)\\
&= \sum_{g\in G} D_a((g g_1^{-1})^{-1})|a, j\rangle\langle b, \ell|D_b(g) &(1.61)
\end{aligned}$$

ここで $g' = g g_1^{-1}$ として，

$$\begin{aligned}
&= \sum_{g'\in G} D_a(g'^{-1})|a, j\rangle\langle b, \ell|D_b(g' g_1) &(1.62)\\
&= \sum_{g'\in G} D_a(g'^{-1})|a, j\rangle\langle b, \ell|D_b(g')D_b(g_1) = A^{ab}_{j\ell}D_b(g_1) &(1.63)
\end{aligned}$$

ここで Schur の補題（定理 1.3 と 1.4）は，D_a と D_b が異なっていれば，$A^{ab}_{j\ell} = 0$ を意味する．そして同じなら（我々は各表現について正準形を選んでおり，よって同値な表現は全く同じに書かれている，ことを思い出そう），$A^{ab}_{j\ell} \propto I$．した

がって次のように書ける．

$$A^{ab}_{j\ell} \equiv \sum_{g\in G} D_a(g^{-1})|a,j\rangle\langle b,\ell|D_b(g) = \delta_{ab}\,\lambda^a_{j\ell}\,I \tag{1.64}$$

$\lambda^a_{j\ell}$ を計算するため，$A^{ab}_{j\ell}$ のトレース (ヒルベルト空間でのそれ，添え字のそれではない）を二通りの方法で計算する．先ず，

$$\mathrm{Tr}\,A^{ab}_{j\ell} = \delta_{ab}\ \mathrm{Tr}\left(\lambda^a_{j\ell}\,I\right) = \delta_{ab}\,\lambda^a_{j\ell}\ \mathrm{Tr}\,I = \delta_{ab}\,\lambda^a_{j\ell}\,n_a \tag{1.65}$$

と書ける．ここで n_a は表現 D_a の次元である．一方，トレースの巡回対称性と $A^{ab}_{jk} \propto \delta_{ab}$ の事実を用いれば，

$$\mathrm{Tr}\,A^{ab}_{j\ell} = \delta_{ab}\sum_{g\in G}\langle a,\ell|D_a(g)D_a(g^{-1})|a,j\rangle = N\,\delta_{ab}\,\delta_{j\ell} \tag{1.66}$$

N は群 G の位数である．かくして $\lambda^a_{j\ell} = N\delta_{j\ell}/n_a$ と決まり次式を得る．

$$\sum_{g\in G} D_a(g^{-1})|a,j\rangle\langle b,\ell|D_b(g) = \frac{N}{n_a}\,\delta_{ab}\,\delta_{j\ell}I \tag{1.67}$$

これらの関係式の行列要素をとれば，既約表現の行列要素に対する直交関係式が得られる．

$$\sum_{g\in G}\frac{n_a}{N}[D_a(g^{-1})]_{kj}[D_b(g)]_{\ell m} = \delta_{ab}\delta_{j\ell}\delta_{km} \tag{1.68}$$

ユニタリーな既約表現に対しては

$$\sum_{g\in G}\frac{n_a}{N}[D_a(g)]^*_{jk}[D_b(g)]_{\ell m} = \delta_{ab}\delta_{j\ell}\delta_{km} \tag{1.69}$$

と書けるので，適当な規格化をした同値でないユニタリーな既約表現の行列要素

$$\sqrt{\frac{n_a}{N}}[D_a(g)]_{jk} \tag{1.70}$$

は，群の元 g の正規直交関数である．行列要素は，正規直交なので線形独立でなければならない．それらが，g の任意の関数がそれらで展開できるという意味での完全系であることも示すことができる．g の任意の関数は，正則表現が作用する空間でのブラベクトルとして表現できる：

$$F(g) = \langle F|g\rangle = \langle F|D_R(g)|e\rangle \tag{1.71}$$

ここで

$$\langle F| = \sum_{g' \in G} F(g')\langle g'| \tag{1.72}$$

であり，D_R は正則表現である．したがって任意の関数 $F(g)$ は，正則表現の行列要素の線形結合として書ける．

$$F(g) = \sum_{g' \in G} F(g')\langle g'|D_R(g)|e\rangle = \sum_{g' \in G} F(g')[D_R(g)]_{g'e} \tag{1.73}$$

これは，同値でない既約表現の行列要素が完全であることを示してはいるが，それらが何であるのか実際に見つける方法を教えてくれない．直交関係式は同じである．それらは我々が表現がどんなものなのかを実際にあらわに知っている場合にのみ有用である．これらの結果をまとめれば，我々は次のことを証明した．

定理 1.5 ***G* のユニタリーな既約表現の行列要素は，正則表現のベクトル空間，あるいは $g \in G$ の関数，に対して完全直交系を与える．**

これからすぐに従う系はかなり驚くべき結果である．

$$N = \sum_i n_i^2 \tag{1.74}$$

—— 群の位数 N は，既約表現の次数 n_i の二乗の和に等しい[2]：これは単に既約表現の行列要素の個数だからである．読者は上で見てきた全ての例でこれが成り立っていることを確かめることができる．

例： フーリエ級数 —— 巡回群 Z_N；a_j ($j = 0, \cdots, N-1$; $a_0 = e$) を元とし，掛け算は

$$a_j a_k = a_{(j+k) \bmod N} \tag{1.75}$$

Z_N の既約表現は

$$D_n(a_j) = e^{2\pi i n j/N} \tag{1.76}$$

全て 1 次元表現である[3]．それで (1.69) 式は

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i n' j/N} e^{2\pi i n j/N} = \delta_{n'n} \tag{1.77}$$

を与える．これはフーリエ級数の基本的関係式に他ならない．

[2]（訳者注）独立な $g \in G$ の関数の個数は群の元の数 —— 位数に等しい．

[3]後でアーベル有限群は 1 次元表現しか持たないことを証明する．

1.13 指標

群の表現 D の**指標** (character) $\chi_D(g)$ は，表現の線形演算子あるいは行列のトレースである：

$$\chi_D(g) \equiv \operatorname{Tr} D(g) = \sum_i [D(g)]_{ii} \tag{1.78}$$

指標の利点は，トレースの巡回対称性 $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$ のために相似変換で不変であり，そのため全ての同値な表現が同じ指標を持つ，という所にある．指標はまた同値でない各既約表現 D_a に対しては異なる —— 事実，それらは全体の因子 N を除いて正規直交である —— これを見るため，(1.69) を，$j = k$，$\ell = m$ と置いて足しあげる．

$$\sum_{\substack{g\in G\\ j=k\\ \ell=m}} \frac{1}{N}[D_a(g)]^*_{jk}[D_b(g)]_{\ell m} = \sum_{\substack{j=k\\ \ell=m}} \frac{1}{n_a}\delta_{ab}\delta_{j\ell}\delta_{km} = \delta_{ab}$$

すなわち，

$$\frac{1}{N}\sum_{g\in G} \chi_{D_a}(g)^* \chi_{D_b}(g) = \delta_{ab} \tag{1.79}$$

異なる既約表現の指標は，直交しているので，違うものである．指標は共役類の上では定数である．なぜなら

$$\operatorname{Tr} D(g^{-1}g_1 g) = \operatorname{Tr}(D(g^{-1})\, D(g_1)\, D(g)) = \operatorname{Tr} D(g_1) \tag{1.80}$$

これほどすぐには分からないが，指標が共役類の上で定数の関数に対して完全系をなす，ということも正しい．これはあらわな計算で示すことができる．$F(g_1)$ がそういう関数としよう．我々はすでに $F(g_1)$ が既約表現の行列要素で展開できることを知っている ——

$$F(g_1) = \sum_{a,j,k} c^a_{jk}[D_a(g_1)]_{jk} \tag{1.81}$$

しかし，F は共役類上で定数だから，次のように書ける．

$$F(g_1) = \frac{1}{N}\sum_{g\in G} F(g^{-1}g_1 g) = \frac{1}{N}\sum_{a,j,k} c^a_{jk}[D_a(g^{-1}g_1 g)]_{jk} \tag{1.82}$$

したがって

$$F(g_1) = \frac{1}{N}\sum_{\substack{a,j,k\\ g,\ell,m}} c^a_{jk}[D_a(g^{-1})]_{j\ell}[D_a(g_1)]_{\ell m}[D_a(g)]_{mk} \tag{1.83}$$

ところが，ここで直交関係式 (1.68) を用いれば，g に関する和をあらわに実行することができる．

$$F(g_1) = \sum_{\substack{a,j,k \\ \ell,m}} \frac{1}{n_a} c^a_{jk} [D_a(g_1)]_{\ell m} \delta_{jk} \delta_{\ell m} \tag{1.84}$$

すなわち

$$F(g_1) = \sum_{a,j,\ell} \frac{1}{n_a} c^a_{jj} [D_a(g_1)]_{\ell\ell} = \sum_{a,j} \frac{1}{n_a} c^a_{jj} \chi_a(g_1) \tag{1.85}$$

これは直交関係式から素直に導かれたが，重要な帰結を持つ．独立な既約表現の指標 $\chi_a(g)$ たちは，共役類上で定数の関数に対する完全正規直交基底をなす．したがって既約表現の数は共役類の数に等しい．我々はこのことをしばしば用いる．

このことはまた，表現にわたる和に関する直交条件があることを意味している．これを見るため，共役類を整数 α でラベルし，k_α を共役類の中の元の数としよう．そして次の行列要素を持つ行列 V を定義する：

$$V_{\alpha a} = \sqrt{\frac{k_\alpha}{N}}\, \chi_{D_a}(g_\alpha) \tag{1.86}$$

ここで g_α は共役類 α の元である．そうすると直交関係式 (1.79) は $V^\dagger V = 1$ と書ける．しかし V は正方行列だから，ユニタリーであり，よって $VV^\dagger = 1$ も成り立つ．すなわち，

$$\sum_a \chi_{D_a}(g_\alpha)^* \chi_{D_a}(g_\beta) = \frac{N}{k_\alpha} \delta_{\alpha\beta} \tag{1.87}$$

結果： D を（必ずしも既約ではない）任意の表現とする．それを完全に既約分解したとき，各々の既約表現はある整数 m_a 回だけ含まれる．指標の直交関係式 (1.79) を使うだけで m_a は簡単に計算できる．

$$\frac{1}{N} \sum_{g \in G} \chi_{D_a}(g)^* \chi_D(g) = m^D_a \tag{1.88}$$

ポイントは D が直和であることである．

$$\sum_a \overbrace{D_a \oplus \cdots \oplus D_a}^{m^D_a \text{回}} \tag{1.89}$$

例えば，正則表現を考えよう．その指標は

$$\chi_R(e) = N, \quad \chi_R(g) = 0 \ (g \neq e \text{ に対して}) \tag{1.90}$$

したがって

$$m_a^R = \chi_a(e) = n_a \tag{1.91}$$

各既約表現は，その次元 n_a と同じ回数だけ，正則表現に現れる．これは，(1.74) と一致している．m_a が，基底の取り方によらず，一意的に決まっていることにも注意．

例： S_3 にもう一度戻る．2 次元表現をあらわに考えることなしに，しかし，共役類たち $\{e\}$，$\{a_1, a_2\}$，$\{a_3, a_4, a_5\}$ は知っているとして，指標を決定しよう．我々がどんな群にも存在すると知っている一つの表現 —— 全ての g に対し $D_0(g) = 1$ となる恒等表現 D_0，から出発するのがもっとも簡単である．この表現は指標 $\chi_0(g) = 1$ を持つ．これで正しく規格化されていることに注意．条件 $\sum n_a^2 = N$ から，他の二つの表現は次元 1 と 2 であることがわかる．他の 1 次元表現に対する指標もほとんど同じくらい簡単に書き下せる．一般に，G の不変部分群 H があれば，H 上で定数となる G の表現があり，因子群 G/H の表現をなす．今の場合，因子群は Z_2 であり，H の元 $\{e, a_1, a_2\}$ に対しては 1，$\{a_3, a_4, a_5\}$ に対しては -1，の非自明な表現を持つ．2 次元表現に対しても $\chi_3(e) = n_3 = 2$ は知っている．指標のテーブルはここまでの知識で次のようになる．

	e	a_1 a_2	a_3 a_4 a_5
0	1	1	1
1	1	1	-1
2	2	?	?

(1.92)

ところが，ここで最後の二つの記入欄は，直交性を使えば埋めることができる．実は二つ目の表現について知らないで単に直交性だけを使うこともできたのだが，Z_2 を使うことが代数を自明にするのである．

	e	a_1 a_2	a_3 a_4 a_5
0	1	1	1
1	1	1	-1
2	2	-1	0

(1.93)

指標は，単にある特定の表現がいくつの既約表現を含むかを知るためだけでなく，実際に可約表現をその既約成分にあらわに分解するのに使うことができ

る．Dを任意の表現とするとき，和

$$P_a = \frac{n_a}{N} \sum_{g \in G} \chi_{D_a}(g)^* D(g) \tag{1.94}$$

が表現aの下で変換する部分空間への射影演算子であることは容易にわかる．これを見るには，直交関係式（1.69）で$j = k$と置き和をとれば，

$$\frac{n_a}{N} \sum_{g \in G} \chi_{D_a}(g)^* [D_b(g)]_{\ell m} = \delta_{ab} \delta_{\ell m} \tag{1.95}$$

となることに注意する．よってDがブロック対角な形に書かれれば，(1.95)の和はD_aのように変換する部分空間では1を与え，その他では皆0になる —— かくして約束したようにそれは射影演算子となる．ポイントは，しかし，(1.94)は元の基底で射影演算子を与えていることである．ブロック対角な形にどうやって持って行くかを知る必要はない．例がこの事情を明らかにするのに役立つだろう．

例 —— 再びS_3

ここにS_3の3次元表現を示す．

$$D_3(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D_3(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$D_3(a_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D_3(a_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$D_3(a_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D_3(a_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.96}$$

より正確に言えば，我々が線形演算子を表すのに行列を書き下すときの常として，これらは同じ**行列要素** —— すなわち

$$[D_3(g)]_{jk} = \langle j | D_3(g) | k \rangle \tag{1.97}$$

を持つ行列である．

演算子を表すのと行列を表すのに別の記号を使うこともできるが，文脈からどちらであるのかを判断することは常に容易である．重要なのは，これが状態

$|j\rangle$ に作用する仕方で，**右から**行列の掛け算をする，という点である．というのは，中間状態の完全系は次のように挿入されるからである．

$$D_3(g)|j\rangle = \sum_k |k\rangle\langle k|D_3(g)|j\rangle = \sum_k |k\rangle[D_3(g)]_{kj} \tag{1.98}$$

この特別の表現 (1.96) は，群を定義する定義表現なので重要である —— それは事実，状態の置換を実現している．例えば，

$$\begin{aligned} D_3(a_1)|1\rangle &= \sum_k |k\rangle[D_3(a_1)]_{k1} = |2\rangle \\ D_3(a_1)|2\rangle &= \sum_k |k\rangle[D_3(a_1)]_{k2} = |3\rangle \\ D_3(a_1)|3\rangle &= \sum_k |k\rangle[D_3(a_1)]_{k3} = |1\rangle \end{aligned} \tag{1.99}$$

で，巡回置換 (1,2,3)，すなわち $1 \to 2 \to 3 \to 1$ をひき起こす．

射影演算子を構成すれば，

$$P_0 = \frac{1}{6}\left(D_3(e) + \sum_{j=1}^{5} D_3(a_j)\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.100}$$

$$P_1 = \frac{1}{6}\left(D_3(e) + \sum_{j=1}^{2} D_3(a_j) - \sum_{j=3}^{5} D_3(a_j)\right) = 0 \tag{1.101}$$

$$P_2 = \frac{2}{6}\left(2D_3(e) - \sum_{j=1}^{2} D_3(a_j)\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{1.102}$$

これはかなり意味が分かりやすい．P_0 は，置換で不変な組み合わせの状態 $(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle)/\sqrt{3}$ へ射影し，P_2 は，$|1\rangle - |2\rangle$ などの対の成分の差，で張られる 2 次元部分空間（D_3 にしたがって変換する）へ射影する．

この構成は，定義表現 D_3 が次の既約表現の直和に分解することを示している．

$$D_3 = D_0 \oplus D_2 \tag{1.103}$$

1.14 固有状態

量子力学において我々はしばしば不変なエルミート演算子の，特にハミルトニアン H の，固有状態に興味がある．これらの固有状態は対称性の群の既約表

現として変換するよう常にとることができる．これを示すため，ヒルベルト空間を H の異なる固有値の部分空間に分解する．各々の部分空間は，対称性の群の表現をなしている．それはヒルベルト空間全体での対称性の群の表現 $D(g)$ は，($[D(g), H] = 0$ だから) H 固有値を変えることができないからである．そこで我々は各々の部分空間において表現を完全に既約分解出来る．

関連する事実として，もしある既約表現がヒルベルト空間で一回しか現れなければ，その表現のなかの状態たちは皆 H（および任意の他の不変な演算子）の固有状態でなければならない，ということである．なぜなら，$H|a,j,x\rangle$ は同じ既約表現に属さねばならず，したがって

$$H\,|a,j,x\rangle = \sum_y c_y\,|a,j,y\rangle \tag{1.104}$$

で，もし x と y が一つの値だけをとるなら $|a,j,x\rangle$ は固有状態だからである．

このことは定理の形でもう一度言っておくほど重要である：

定理 1.6 あるエルミート演算子 H が群 G の表現の全ての元 $D(g)$ と可換であるならば，H の固有状態を G の既約表現として変換するように採ることができる．もしある既約表現がヒルベルト空間の中で一回しか現れなければ，その既約表現に属する状態はみな同じ固有値を持つ．

アーベル群に対しては，H 固有状態を既約表現として変換するよう選ぶこの手続きは，H と $D(g)$ を同時に対角化することと類似のことであることに注意しよう．例えば，パリティに付随した群 Z_2 に対しては，それは H の固有状態を常に，対称か反対称に選ぶことができる，という言明である．

パリティの場合，パリティ変換を表す線形演算子はエルミートであり，それ故対角化できることを知っている．しかし，有限群の元を表す演算子はユニタリーに選べることを示したけれど，一般にはエルミートではない．にもかかわらず，H と可換なアーベル群に対しては，群の元たちが H と同時に対角化できることが示せる．理由は次の定理である：

定理 1.7 有限アーベル群の既約表現は全て *1* 次元である．

これの一つの証明は，我々の共役類の議論と (1.74) から従う．アーベル群に対しては，任意の g と g' に対し $g\,g'\,g^{-1} = g'$ だから，共役変換は何もしない．そ

れゆえ，全ての元が皆それだけで共役類である．各々の共役類に一つの既約表現が対応するので，既約表現の数は，群の位数に等しい．そうすると，(1.74) を満たす唯一の方法は，全ての n_i たちを 1 とすることである．これで定理は証明された．それは，アーベル群の表現を既約表現に分解することが，群の全ての元に対する全ての表現行列を対角化することと結局同じであることを意味する．

非アーベル群に対しては，全ての $D(g)$ たちを同時に対角化することはできないが，H が定数の各々の部分空間で表現を完全に既約分解することが，次にできる最善のことである．

量子力学でハミルトニアンを対角化する問題と全く類似の古典論の問題は，力学系の安定点まわりの微小振動の基準モードを見つけることである．そこでは，角振動数の二乗が $M^{-1}K$ 行列の固有値であり，基準モードは $M^{-1}K$ の固有ベクトルである．次の三つの節では一つの例を研究する．

1.15 テンソル積

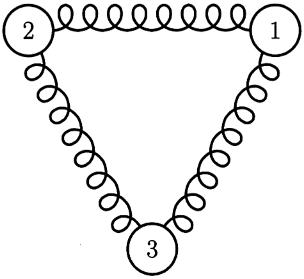
我々は，可約な表現がより小さな表現の直和に分解出来ることを見た．逆に表現をいくつかくっつけて大きな表現とすることもできる．D_1 を基底ベクトル $|j\rangle$ $(j = 1〜m)$ を持つ空間に働く m 次元表現，D_2 を基底ベクトル $|x\rangle$ $(x = 1〜n)$ を持つ空間に働く n 次元表現，としよう．我々は，j と x の順序付きの対でラベルされる基底ベクトル —— $|j,x\rangle$ をとることにより，**テンソル積空間** と呼ばれる $m\times n$ 次元の空間を作ることができる．j が 1 から m まで，x が 1 から n まで走るとき，順序付きの対 (j,x) は $m\times n$ 個の異なる組み合わせを走る．この大きな空間で，二つの小さな表現を掛けることにより，**テンソル積表現** $D_1\otimes D_2$ と呼ばれる新しい表現を定義することができる．もっと正確には，行列要素 $D_{D_1\otimes D_2}(g)$ が $D_1(g)$ と $D_2(g)$ のそれの積である：

$$\langle j,x|\, D_{D_1\otimes D_2}(g)\,|k,y\rangle \equiv \langle j|\, D_1(g)\,|k\rangle\, \langle x|\, D_2(g)\,|y\rangle \tag{1.105}$$

これが G の表現を定義していることは容易に分かる．しかし一般には，それは既約表現ではない．以下での我々のお気に入りの娯楽の一つは，テンソル積表現を既約表現に分解することである．

1.16　テンソル積の例

次の物理の問題を考えよう．三つの石ころが図に示されているようにバネで三角形につながれている．これらは摩擦のない表面を自由に滑れるようになっているとする．



(1.106)

この系の基準モードについて何が言えるであろうか？ポイントは，この系に S_3 対称性があることで，我々はこの対称性を使い，定理1.6を適用することによって系について多くのことを学ぶことができる．系は，三つの石ころの x，y 座標：

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \tag{1.107}$$

で記述される6自由度を持つ．これは**テンソル積**の構造を持つ —— 6次元空間は,（三つの）石ころの3次元空間と，x と y 座標の2次元空間の積である．我々はこれらの座標が二つの添え字を持っていると考えることができる．それは三つの2次元ベクトル，$\vec{r}_i$，で，ベクトル添え字のそれぞれが2成分持っている．それで我々は成分を $r_{j\mu}$ と書き，j は質点をラベルし1から3まで走り，μ は x または y 成分をラベルし1から2まで走る．対応は

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{21} & r_{22} & r_{31} & r_{32} \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{1.108}$$

この3次元空間は S_3 のもとで表現 D_3 として変換する．2次元空間は以下の表現 D_2 として変換する．

$$\begin{gathered} D_2(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2(a_1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ D_2(a_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D_2(a_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ D_2(a_4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D_2(a_5) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{1.109}$$

これは (1.21) と同じである．ここで (1.105) を用いて，座標の 6 次元表現は単にこれらの二つの積になる：

$$[D_6(g)]_{j\mu k\nu} = [D_3(g)]_{jk}[D_2(g)]_{\mu\nu} \tag{1.110}$$

よって，例えば，

$$D_6(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.111}$$

これは，$D_3(a_1)$ の 3 つの 1 たちの代わりに 3 つの $D_2(a_1)$ のコピーを置いた構造を持つ．他の生成子も同様な構造である．

系は S_3 対称性を持っているので，系の基準モードは対称性のはっきりした既約表現として変換しなければならない．だから，もしこれらの表現への射影演算子を構成すれば，基準モードを見つけるのにいくらかの助けになるだろう．特に，ある既約表現が一度しか現れなければ，それは定理 1.6 により基準モードでなければならない．ある表現が一回以上現れる場合は，そのモードを決めるのにいくらか余分の情報が必要になる．

表現 D_6 に各々の既約表現が何回現れるかは，D_6 の指標を見つけ，直交関係式を用いれば簡単に決定することができる．D_6 の指標を見つけるには，我々は重要な一般的結果を使う．二つの表現のテンソル積の指標は，その因子の指標の積である．このことはテンソル積の定義とトレースから直ちに従う．

$$\chi_{D_1\times D_2} = \chi_{D_1}\,\chi_{D_2} \tag{1.112}$$

それで今の場合，

$$\begin{aligned} \chi_6(g) &= \sum_{j\mu}[D_6(g)]_{j\mu j\mu} \\ &= [D_3(g)]_{jj}[D_2(g)]_{\mu\mu} = \chi_3(g)\chi_2(g) \end{aligned} \tag{1.113}$$

であり，積は次の表に示したものとなる：

$$\begin{array}{c||c|c|c} & e & \begin{matrix}a_1\\a_2\end{matrix} & \begin{matrix}a_3\\a_4\\a_5\end{matrix} \\ \hline D_3 & 3 & 0 & 1 \\ \hline D_2 & 2 & -1 & 0 \\ \hline D_6 & 6 & 0 & 0 \end{array} \tag{1.114}$$

これは正則表現の指標と同じである．したがってこの表現は正則表現と同値で，D_0 と D_1 を1回，D_2 を2回，含んでいる．

(1.113) は，簡単だが重要な一般的関係式の例になっていることに注意しよう．それは定理と呼んで威厳を付けても良いものである ——

定理 1.8 テンソル表現の指標は，因子の指標の積である．

これらの道具をもって，我々は群論を用いてこの系の基準モードを見つけることができる．

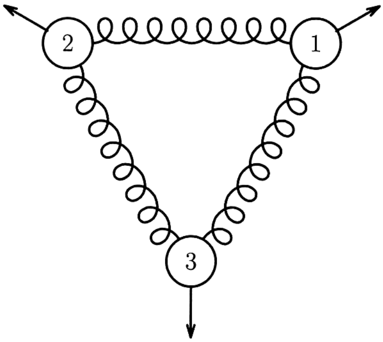
1.17 * 基準モードを見つける

D_0 および D_1 への射影演算子は1次元である．

P_0 は

$$P_0 = \frac{1}{6}\sum_{g\in G}\chi_0(g)^* D_6(g)$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{12} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \tag{1.115}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \tag{1.116}$$

となり，次の図に示す運動に対応する．



(1.117)

いわゆる「息づかいモード（breathing mode)」で，三角形は形を保ちながら大きくなったり小さくなったりする．

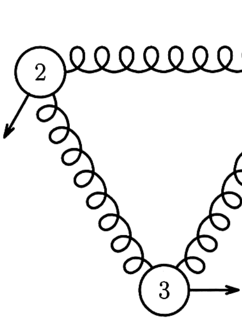
P_1 は，

$$P_1 = \frac{1}{6}\sum_{g\in G}\chi_1(g)^* D_6(g)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{12} & \frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 \\ \frac{1}{12} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{12} & \frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.118}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.119}$$

となり，次の図に示す運動に対応する．



(1.120)

これは，三角形が回転するモードで，元に戻す力が存在しないので振動数が 0 の基準モードである．

我々は，対称性以外，いかなる物理の情報も入れないでこれら二つの基準モードを見つけた! ということに再び注意しておこう．

最後に P_2 は，

$$P_2 = \frac{2}{6}\sum_{g\in G}\chi_2(g)^* D_6(g)$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \tag{1.121}$$

予想したようにこれはランク 4 の射影演算子 ($\mathrm{Tr}\,P_2 = 4$) であり，何らかの力学的情報が必要だ．幸い，二つのモードは簡単に得られる —— 三角形全体の並進である．

例えば，x 方向の並進は，次式で射影される．

$$T_x = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.122}$$

y 方向の並進は，次式である．

$$T_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \tag{1.123}$$

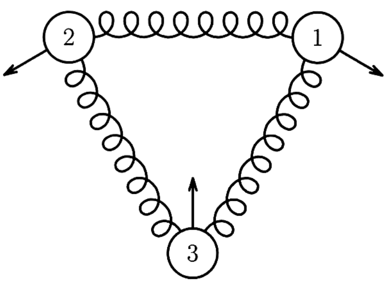
それゆえ，自明でないモードは次式で射影される．

$$\begin{aligned} &P_2 - T_x - T_y \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.124}$$

対応するモードがどんなものかを見るため，これを単位ベクトル (0 0 0 0 0 1) に作用させれば，ベクトル

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \tag{1.125}$$

を得る．これは次の図の運動

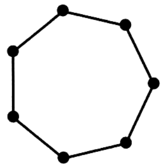


(1.126)

に対応している．これを $2\pi/3$ 回転したものも線形独立なモードを与える．

1.18　* 2n+1角形の対称性

これは変換群のすばらしい例題で，指標（実際には既約表現の全て）を容易に計算できるものである．下に示した7角形のような，$2n+1$個の頂点をもつ正多角形を考えよう．



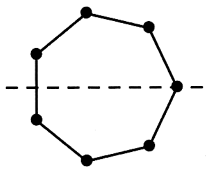
(1.127)

$2n+1$角形の対称性の群は，単位元と，$2n$個の回転

$$\text{角度}\quad \pm\frac{2\pi j}{2n+1}\text{の回転}\quad j=1,\cdots,n \tag{1.128}$$

それに下に示すような，中心と頂点を通る線による$2n+1$個の鏡映，からなる．

中心と頂点を通る線による鏡映　(1.129)



(1.130)

したがって，この対称性の群の位数は$N=2\times(2n+1)$である．

$n+2$個の共役類がある：

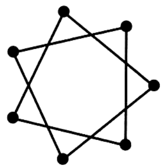
1 —— 単位元，e;

2 —— $2n+1$個の鏡映;

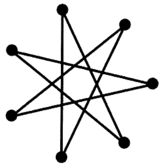
3から n**+2** —— 角度$\pm\dfrac{2\pi j}{2n+1}$ $(j=1,\cdots,n)$の回転 —— jの値のそれぞれが，別の共役類.

鏡映の全てが同じ共役類に入っているのは，どの鏡映からどの鏡映へも，回転による共役で移れるからである．回転は回転による共役で不変であるが，鏡映による共役は回転の符号を変えるので各共役類には$\pm$の対が入っている．

さらに，回転の n 個の共役類たちは，下に示すように，頂点の巡回置換とラベルの付け替えのもとで互いに等価である：



(1.131)



(1.132)

指標は次のようになる．

e	r	$j=1$	$j=2$	$\cdots$	$j=n$
1	1	1	1	$\cdots$	1
1	-1	1	1	$\cdots$	1
2	0	$2\cos\frac{2\pi m}{2n+1}$	$2\cos\frac{4\pi m}{2n+1}$	$\cdots$	$2\cos\frac{2n\pi m}{2n+1}$

(1.133)

最後の行で，m の異なる値が，n 個の**異なる** 2 次元表現の指標を与える．

1.19 n 個の対象の置換群

S_n と呼ばれる，n 個の対象に対する置換群，の任意の元は，サイクルを用いて表される．**サイクル** (cycle) とは部分集合の巡回置換である．我々はこれを利用した記号を使う．すなわち，巡回置換されるものに対応した数字の組を括弧でくくったものでサイクルを表記する．例えば：

(1) は，$x_1 \to x_1$ を表す．

(1372) は，$x_1 \to x_3 \to x_7 \to x_2 \to x_1$ を表す．

S_n の各元は 1 から n までの各整数を正確に一個のサイクルにだけ含む．

例：

単位元は $e = \mathbf{(1)(2)\cdots(n)}$ と書ける —— n 個の 1-サイクル —— これは唯一.

二つの元の交換（互換）は $\mathbf{(12)(3)\cdots(n)}$ 等と書ける —— 一つの 2-サイクルと $n{-}2$ 個の 1-サイクル —— $n(n-1)/2$ 個ある —— $(j_1 j_2)(j_3)\cdots(j_n)$.

任意の元は j-サイクルを k_j 個含み,

$$\sum_{j=1}^{n} j\,k_j = n \tag{1.134}$$

例えば，置換 $\mathbf{(123)(456)(78)(9)}$ は，二つの 3-サイクルと一つの 2-サイクル，一つの 1-サイクルを持ち，$k_1 = k_2 = 1$，$k_3 = 2$ である.

S_n の**定義表現** (defining representation) と呼ばれる簡単な（しかし可約な）n 次元表現がある．それは，置換される「対象」がちょうど n 次元ベクトル空間の基底ベクトルとなるものである.

$$|1\rangle\,,\ |2\rangle\,,\cdots|n\rangle \tag{1.135}$$

置換が x_j を x_k にするなら，対応する表現演算子 D は，$|j\rangle$ を $|k\rangle$ に写すので

$$D\,|j\rangle = |k\rangle \tag{1.136}$$

よって

$$\langle\ell|\,D\,|j\rangle = \delta_{k\ell} \tag{1.137}$$

この表現における各行列は，各行，各列にただ一個の 1 を持つ.

1.20 共役類

共役類は，ちょうど整数 k_j たちでラベルできる，サイクル構造である．例えば，互換は全て同じ共役類に入る —— これは，内部自己同型 gg_1g^{-1} が，g が互換の時 g_1 のサイクル構造を変えないことを確かめれば十分である．なぜなら，任意の置換が互換から作れるからである．これが正しいことをいくつかの例で見てみよう．特に，任意の置換に対し，互換 (12)(3)$\cdots$ で共役をとってみて，単

に 1，2 を交換するのみでサイクル構造を変えないことを見よう．

例 —— **(12)(3)(4) · (1)(23)(4) · (12)(3)(4)** (互換は自分の逆元でもあることに注意)

$$
\begin{array}{cl}
1234 & \\
\downarrow & (12)(3)(4) \\
2134 & \\
\downarrow & \mathbf{(1)(23)(4)} \\
2314 & \\
\downarrow & (12)(3)(4) \\
3214 & \\
 & = \\
1234 & \\
\downarrow & \mathbf{(2)(13)(4)} \\
3214 &
\end{array}
\tag{1.138}
$$

(12)(3)(4) · (1)(234) · (12)(3)(4)

$$
\begin{array}{cl}
1234 & \\
\downarrow & (12)(3)(4) \\
2134 & \\
\downarrow & \mathbf{(1)(234)} \\
2341 & \\
\downarrow & (12)(3)(4) \\
3241 & \\
 & = \\
1234 & \\
\downarrow & \mathbf{(2)(134)} \\
3241 &
\end{array}
\tag{1.139}
$$

1 と 2 が異なるサイクルに入っていれば，約束したように，それらは (12) による共役で交換される．

1 と 2 が同じサイクルに入っていても同じことが起こる．例えば，

$$
\begin{array}{cl}
1234 & \\
\downarrow & (12)(3)(4) \\
2134 & \\
\downarrow & \mathbf{(123)(4)} \\
1324 & \\
\downarrow & (12)(3)(4) \\
3124 & \\
 & = \\
1234 & \\
\downarrow & \mathbf{(213)(4)} \\
3124 &
\end{array}
\tag{1.140}
$$

再び，今度は同じサイクル内で，ちょうど1と2だけが交換された．

これを理解する別の方法は，共役変換が相似変換に類似であることに注意することだ．実際，(1.135) の n 次元定義表現において，互換 (12) による共役変換は単に $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ を切り換える基底変換に過ぎない．そうすれば共役変換がサイクル構造を変えず，1と2に対して置換が行うことを交換するだけであることは明らかである．互換を組み合わせれば任意の置換を作れるので，また互換による共役変換を繰り返せば，与えられたサイクル構造で任意の整数の並べ方から任意の別の並べ方へ変えられるので，**共役類は特定のサイクル構造を持った全ての置換から成らねばならない**．

ここで，各々の共役類に属する群の元の数を数えよう．k_1 個の1-サイクル，k_2 個の2サイクル，等々，の形の置換からなる共役類を考える．k_j たちは (1.134) を満たす．この共役類の中の異なる置換の数は

$$\frac{n!}{\prod_j j^{k_j} k_j!} \tag{1.141}$$

である．なぜなら，1から n までの整数の置換はそれぞれ共役類の中の置換を与えるが，各サイクルの中での巡回順序は関係がなく，

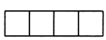
$$(123) \text{ は } (231) \text{ と同じ} \tag{1.142}$$

同じ長さのサイクルたちの順番は全く関係がない，からである．

$$(12)(34) \text{ は } (34)(12) \text{ と同じ} \tag{1.143}$$

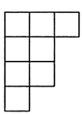
1.21　ヤング図形

j-サイクルの各々に長さ j の一列の箱（縦に j 個の箱を並べたもの）を対応させ，それを頭の位置をそろえて，j の減る順に右方向へ並べて得られる図，を考えるのは有用である．箱全部の数は n である．一例を示せば，



(1.144)

は，S_4 における四つの1-サイクルである ―― これは恒等変換 ―― 常にそれ自身で共役類．別の例：

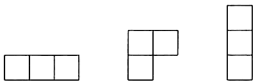


(1.145)

は，S_8 における，4-サイクル，3-サイクル，1-サイクルがそれぞれ一つずつのもの．これらの箱を並べた図はヤング図形 (Young tableaux)[4] と呼ばれる．異なるヤング図形はそれぞれ異なる共役類を表し，それ故，既約表現と一対一に対応する．

1.22 例 —— 昔なじみの S_3

共役類は

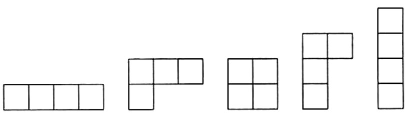


(1.146)

それぞれの元の数は

$$\frac{3!}{3!} = 1 \qquad \frac{3!}{2} = 3 \qquad \frac{3!}{3} = 2 \tag{1.147}$$

1.23 もう一つの例 —— S_4



(1.148)

属する元の数は，それぞれ

$$\frac{4!}{4!} = 1 \quad \frac{4!}{4} = 6 \quad \frac{4!}{8} = 3 \quad \frac{4!}{3} = 8 \quad \frac{4!}{4} = 6 \tag{1.149}$$

S_4 の指標は次のようになる (列をラベルする共役類は (1.148) と同じ順として):

共役類

1	1	1	1	1
3	1	−1	0	−1
2	0	2	−1	0
3	−1	−1	0	1
1	−1	1	1	−1

(1.150)

1 行目は恒等表現を表す．

[4]（訳者注）数学の文献では，ここの図のような空の箱を並べたものをヤング図形 (Young diagram)，ヤング図形の箱に 1 から n の整数を入れたものをヤング盤 (Young Tableaux)，と呼んで区別しているが，原著では区別していないので，ひっくるめて Young Tableaux をヤング図形と訳している．

1.24　* ヤング図形と S_n の表現

我々は n 個の箱を持ったヤング図形が S_n の既約表現に対応していることを見た．実際，ヤング図形を用いて，S_n の正則表現の適当な部分空間を同定することによって既約表現をあらわに構成することができるのである．既約表現が何であるかを見るため，図形の箱の中に1から n までの整数をあらゆる可能なやり方で入れることから始める．やり方は全部で $n!$ 通りある．そこで，我々は，各々の1から n までの整数の箱への割当てを S_n の正則表現のある状態と同定する．ある標準の順序を，例えば (本のページで言葉を読む時のように)，左から右へ，そして上から下へ，と定義して，箱に入った整数から特定の置換に付随する状態に翻訳する．例えば，

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 6&5&3&2\\ \hline 1&7 \\ \cline{1-2} 4 \\ \cline{1-1}\end{array} \rightarrow |6532174\rangle \tag{1.151}$$

ここで $|6532174\rangle$ は置換

$$1234567 \rightarrow 6532174 \tag{1.152}$$

に対応した状態である．これで，図形への $n!$ 通りの箱の割当ては正則表現の $n!$ 個の状態を記述することになる．

次に，一つの特定の図形に対して，対応する状態を，各行の数字に関して対称化し，次に各列の数字に関し反対称化する．例えば，

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\ \hline\end{array} \rightarrow |12\rangle + |21\rangle \tag{1.153}$$

そして

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \rightarrow |123\rangle + |213\rangle - |321\rangle - |231\rangle \tag{1.154}$$

このようにして構成した状態の組は正則表現のある部分空間を張ることになる．状態をあらわに構成することができるし，これらが置換でどのように変換するかも知っている．このようにして構成した部分空間が S_n の表現であることは，置換が単に，図形への違った数字の割当てから出発することに対応すること，そして部分空間の任意の状態に置換を演算すればその部分空間の別の状態を与えること，から分かる．事実，この表現は既約であり，ヤング図形に対応した既約表現と呼ぶ.

S_3 の例を考えよう．図形

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \ \\ \hline\end{array} \tag{1.155}$$

は，完全対称な状態を与え，自明な表現として変換する 1 次元部分空間に対応している．図形

$$\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array} \tag{1.156}$$

完全反対称な状態を与え，今度は互換が -1 で表される表現として変換する 1 次元部分空間に対応している．最後に

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ \\ \cline{1-1}\end{array} \tag{1.157}$$

は次の状態たちを与える．

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \to |123\rangle + |213\rangle - |321\rangle - |231\rangle \tag{1.158}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array} \to |321\rangle + |231\rangle - |123\rangle - |213\rangle \tag{1.159}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array} \to |231\rangle + |321\rangle - |132\rangle - |312\rangle \tag{1.160}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \to |132\rangle + |312\rangle - |231\rangle - |321\rangle \tag{1.161}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \to |312\rangle + |132\rangle - |213\rangle - |123\rangle \tag{1.162}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \to |213\rangle + |123\rangle - |312\rangle - |132\rangle \tag{1.163}$$

同じ列の二つの数字を入れ替えると状態は符号を変えることに注意．これは一般に正しい．さらに，巡回置換でつながる三つの状態は，足せばゼロになることをあらわに見ることができる．だから，この部分空間は 2 次元で，S_3 の 2 次元既約表現として変換する．

このようにして構成した表現の次元は次式で与えられることが分かる．

$$\frac{n!}{H} \tag{1.164}$$

ここで H はヤング図形の「フック」因子であり，次のように数える．フックとは，ある列の底から鉛直に箱に沿って昇ってゆき，ある箱で右折してその行の

箱を横切ってゆく，かぎ形の線をいう．各箱に対し，(そこを右折の角とする) 一つフックがある．フックが通過する箱の数を h と呼び，全てのフックに対する h を掛け合わせたものが H である．13 章で $SU(N)$ の表現にヤング図形を応用する際にもう一度フックに立ち返るだろう．

S_n の既約表現を構成するこの手続きは (いくぶん面倒ではあるが) 完全に機械的であり，n 個の箱を持ったヤング図形から S_n の全ての表現を構成するのに使うことができる．

有限群やその表現に関してもっと述べたいこともあるが，我々の第一の主題は連続群であるので，差し当たり有限群を離れる．しかしながら我々は，置換群の表現が連続群の表現において重要な役割を果たすことを見るだろう．それ故，時折 S_n に戻る．

問題

1.A.　三つの元を持つ群の掛け算表を見いだせ．またそれが一意的であることを証明せよ．

1.B.　四つの元を持つ群に対して，可能な掛け算表で本質的に相異なるもの (すなわち元の名前の付け替えで関係づけられないもの) を全て見いだせ．

1.C.　置換群の表現 (1.135) が可約であることを示せ．

1.D.　D_1 と D_2 がある有限群 G の同値な既約表現，すなわち，

$$D_2(g) = S\,D_1(g)\,S^{-1} \quad \forall g \in G$$

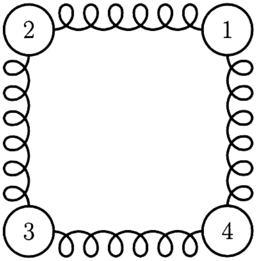
とする．このとき

$$A\,D_1(g) = D_2(g)\,A \quad \forall g \in G$$

を満たす演算子 A に関し何が言えるか?

1.E.　正四面体を不変に保つ，全ての離散的回転のなす群を見いだせ．ただし，正四面体の四つの頂点をラベルして，その回転をそれらの頂点の置換と見なして．これはある群の 4 次元表現を定義する．この群の共役類と既約表現の指標を求めよ．

***1.F**. 下図のような，バネでつながれた四つの石ころが摩擦のない平面上を滑る系の基準モードを，本文で正三角形の場合にやったように，ここでは 8 個の元を持つ正方形の対称性の群を用いて，分析せよ．ただし，バネは質点に固く (例えば回転しないように) 付けられていて，正方形はある種の剛性を持っているとせよ．



第2章

リー群

群の元 $g \in G$ が一組の連続パラメータ α になめらかに依存しているとしよう——

$$g(\alpha) \tag{2.1}$$

なめらかと言うときには，群の上で近いという何らかの概念があることを意味し，それは，群の元の空間で二つの元が「互いに近い」ならば，それらを記述するパラメータもまた互いに近いというような概念である．

2.1 生成子

単位元は群における重要な元であるから，(少なくとも単位元に近い) 群の元を $\alpha = 0$ が単位元に対応するようパラメータ化するのが有用である．それゆえ単位元のある近傍で，群の元が N 個の実パラメータ α_a $(a = 1, \cdots, N)$ で記述され，

$$g(\alpha)|_{\alpha=0} = e \tag{2.2}$$

となると仮定する．このとき，群の表現があれば，表現の線形演算子も同様にパラメータ化され，

$$D(\alpha)|_{\alpha=0} = 1 \tag{2.3}$$

となる．単位元のある近傍で，$D(\alpha)$ はテーラー展開でき，十分近いなら，初項のみを保持すればよい:

$$D(d\alpha) = 1 + id\alpha_a X_a + \cdots \tag{2.4}$$

ここで，パラメータが無限小であることに気づかせるべく，$d\alpha$ と記した．(2.4) において，くり返し添え字については和をとるものと了解(「アインシュタインの規約」) し，

$$X_a \equiv -i \left.\frac{\partial}{\partial \alpha_a} D(\alpha)\right|_{\alpha=0} \tag{2.5}$$

X_a $(a = 1, \cdots, N)$ は，**群の生成子** (generators) と呼ばれる．このパラメータ化が最大倹約的 (すなわち，異なる群の元を区別するのに全てのパラメータが実際必要) であるなら，X_a たちは独立である．i（虚数単位）が定義 (2.5) に含まれているので，表現がユニタリーの場合は，X_a はエルミート演算子になる．

ソーファス・リー（Sophus Lie）は，表現に全く言及せず抽象的な群において生成子が実際どのように定義できるかを示した．彼の仕事の結果，この種の群は**リー群** (Lie group) と呼ばれる． 私はリー群についてそのように語るつもりはない．なぜなら，ここでは群よりも，その表現の方に興味があるからである．しかし，それは美しい理論的構築物であり，未だ見たことがない人は一度見ておきたいと思うかもしれない．

恒等元から離れるにつれて，群の元をパラメータ化するやり方には膨大な自由度があるが，我々は，群の掛け算則が，それゆえヒルベルト空間における表現演算子の掛け算則が，見やすくなるようなパラメータ化を選ぶ方が良い．特に，恒等元からある決まった方向に離れていくことが，単に無限小の群の元

$$D(d\alpha) = 1 + i d\alpha_a X_a \tag{2.6}$$

の大きな冪乗をとることによってできるようにする．群の性質により，これは常に群の別の元を与える．これは，有限の α に対する群の元の表現を

$$D(\alpha) = \lim_{k\to\infty} (1 + i\alpha_a X_a/k)^k = e^{i\alpha_a X_a} \tag{2.7}$$

で定義することを示唆する．極限ではこれは群のある元の表現になるはずである．k が大きくなれば $1 + i\alpha_a X_a/k$ が (2.4) における群の元の表現になるからである．これは，(時に**指数パラメータ化** (exponential parameterization) と呼ばれる[1]) 表現の，よって群の掛け算則の，特定のパラメータ化を定義する．特に，これは，群の元が（少なくとも e のある近傍では）生成子で書けることを意味

[1]（訳者注）数学の方では，(2.7) の形のパラメータ化による座標 (α_a) は第一種標準座標系と呼ばれる

している．群の元と違って，生成子はベクトル空間をなすので，これはうれしいことだ．それらは足し算をすることも，実数を掛けることも，できる．実際，我々はしばしば，生成子という言葉を使って，X_a たちによって張られる実線形空間における任意の元を呼ぶだろう．

2.2　リー代数

今やどの特定の方向でも群の掛け算則は単純である．次の形をした群の元の1パラメータ族

$$U(\lambda) = e^{i\lambda\alpha_a X_a} \tag{2.8}$$

があるが，その掛け算則は単純に

$$U(\lambda_1)U(\lambda_2) = U(\lambda_1 + \lambda_2) \tag{2.9}$$

である．しかしながら，二つの異なる生成子の線形結合で生成される群の元を掛け算する場合は，ことはそれほど単純ではない．一般に

$$e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} \neq e^{i(\alpha_a+\beta_a)X_a} \tag{2.10}$$

である．他方，(少なくとも単位元の近傍では) 指数関数が群の表現を与えるから，左辺の積はある生成子の指数関数で書ける筈で，ある δ があって

$$e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} = e^{i\delta_a X_a} \ . \tag{2.11}$$

となる．そして全ては滑らかであるから，両辺を展開し α と β の適当なべきを等置することによって，この δ を求めることが出来る．これを行うとおもしろいことが起こる．生成子たちが交換関係（あるいは交換子代数）の下で**代数** (algebra) をなしている場合のみうまくいくことがわかるのだ．このことを見るため，非自明な最初の次数までこれを実行してみよう．

$$i\delta_a X_a = \ln\left(1 + e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} - 1\right) \tag{2.12}$$

これを展開してパラメータ α と β に関して2次までの項を保持する．$\ln(1+K)$ のテーラー展開を用いるが，K は，

$$K = e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} - 1$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(1 + i\alpha_a X_a - \frac{1}{2}(\alpha_a X_a)^2 + \cdots\right) \\
&\quad \times \left(1 + i\beta_b X_b - \frac{1}{2}(\beta_b X_b)^2 + \cdots\right) - 1 \\
&= i\alpha_a X_a + i\beta_a X_a - \alpha_a X_a \beta_b X_b \\
&\quad - \frac{1}{2}(\alpha_a X_a)^2 - \frac{1}{2}(\beta_a X_a)^2 + \cdots
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

これを用いれば，次式を得る．

$$
\begin{aligned}
i\delta_a X_a &= K - \frac{1}{2}K^2 + \cdots \\
&= i\alpha_a X_a + i\beta_a X_a - \alpha_a X_a \beta_b X_b - \frac{1}{2}(\alpha_a X_a)^2 \\
&\quad - \frac{1}{2}(\beta_a X_a)^2 + \frac{1}{2}(\alpha_a X_a + \beta_a X_a)^2 + \cdots
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

さてここがポイントである．(2.14) の高次項たちは相殺しようとしている．実際，もし X が通常の数だったら，指数関数の積は指数の和の指数関数になるので，高次項は全部相殺している．そうならないのは，ひとえに X が線形演算子であって互いに交換しないせいである．それゆえ (2.14) における $i\alpha_a X_a + i\beta_a X_a$ 以降の項は，交換子に比例する．案に違わず，(2.14) をあらわに計算すれば，

$$
\begin{aligned}
i\delta_a X_a &= K - \frac{1}{2}K^2 + \cdots \\
&= i\alpha_a X_a + i\beta_a X_a - \frac{1}{2}\left[\alpha_a X_a,\, \beta_b X_b\right] + \cdots \ .
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

我々は，(2.15) を得るのに，群であるという性質とテーラー展開を許す滑らかさの性質のみを用いた．(2.15) 式から，再び α と β に関する展開式として δ_a を計算することが出来る．

$$
[\alpha_a X_a,\, \beta_b X_b] = -2i(\delta_c - \alpha_c - \beta_c)X_c + \cdots \equiv i\gamma_c X_c \tag{2.16}
$$

ここで i は γ を実数にするために付けた．$\cdots$ は α ないし β の因子を 2 つ以上含む項を表す．(2.16) は，あらゆる α と β に対し成立しなければならないから，ある定数 f_{abc} があって，

$$
\gamma_c = \alpha_a \beta_b f_{abc} \tag{2.17}
$$

が成り立たねばならない．よって，

$$
[X_a,\, X_b] = i\, f_{abc} X_c \, . \tag{2.18}
$$

ここで，$[A, B] = -[B, A]$ だから，

$$f_{abc} = -f_{bac} \ . \tag{2.19}$$

ここで，

$$\delta_a = \alpha_a + \beta_a - \frac{1}{2}\gamma_a + \cdots \tag{2.20}$$

と書けるので，γ やより高次の項が消えれば，(2.10) 式の等号が成り立つ，ということに注意しておこう．

(2.18) 式が,「生成子が交換子の下で代数をなす」という言明の意味するところである．我々は，このことがリー群の群の性質から従うことを今示した．リー群の元はパラメータに滑らかに依存するからである．代数における交換子は，群に対する掛け算則に類似の役割を果たす．

もし (2.12) 式において 2 次以上の展開を続ければ，群の掛け算則を保つことを保証するためにさらなる条件が必要になるのではないかと心配するかもしれない．**注目すべきことは，必要にならないということだ．交換関係 (2.18) でじゅうぶんなのである．** 実際，定数 f_{abc} を知っていれば，任意の α と β に対し，原点のある有限近傍で好きなだけの精度で δ を計算できる！よって，f_{abc} は極めて重要である —— それは実質的に，群の掛け算則全てを要約している．f_{abc} は群の**構造定数** (structure constant) と呼ばれる．構造定数は，任意の非自明な表現で，すなわち X_a が 0 にならない限り，計算することができる．

交換子関係 (2.18) は，群の**リー代数**と呼ばれる．リー代数は構造定数によって完全に決定される．群の各表現は，明らかな仕方で代数の表現を与え，構造定数は，群の掛け算則と滑らかさだけで決まるので，全ての表現に対し同じである．同値性や，既約・可約性は，群から代数へ変更なしに移される．

代数の任意のユニタリー表現が存在すれば f_{abc} たちが実数になる，ということに注意したい．なぜなら，エルミートな X たちの交換関係の共役をとれば，

$$\begin{aligned} [X_a,\, X_b]^\dagger &= -i\, f^*_{abc} X_c \\ = [X_b,\, X_a] &= i\, f_{bac} X_c = -i\, f_{abc} X_c \end{aligned} \tag{2.21}$$

を得るからである．我々はユニタリー表現を持つ群に興味があるので，f_{abc} は実数であることを単に仮定する．

2.3 ヤコビ恒等式

生成子の行列表現も次の恒等式を満たす:

$$[X_a, [X_b, X_c]] + \text{巡回置換項} = 0\,. \tag{2.22}$$

これは**ヤコビ恒等式**と呼ばれるが，交換子を単に展開するだけで確かめることができる[2].

ヤコビ恒等式は，ある場合にはより使いやすく啓蒙的でもある次の形に書くことができる：

$$[X_a, [X_b, X_c]] = [[X_a, X_b]\,, X_c] + [X_b, [X_a, X_c]]\,. \tag{2.23}$$

これは交換関係に対する積の規則

$$[X_a, X_b X_c] = [X_a, X_b] X_c + X_b [X_a, X_c]\,. \tag{2.24}$$

の一般化である．ヤコビ恒等式は，このテキストで扱う有限次元表現のみを持つリー代数に対してはかなり自明ではある．しかし，リーのもっと一般的な扱いにおいては，生成子の積が良く定義さえされない状況でもヤコビ恒等式が意味をなす，ということには注意する価値がある．

2.4 随伴表現

構造定数は，それ自身が**随伴表現** (adjoint representation) と呼ばれる代数の表現を生成している．代数 (2.18) を用いれば，

$$\begin{aligned} &[X_a, [X_b, X_c]] \\ &= i\, f_{bcd}\, [X_a, X_d] \\ &= -f_{bcd} f_{ade} X_e \end{aligned} \tag{2.25}$$

と計算できるので，(X_a は独立だから) (2.22) 式は

$$f_{bcd} f_{ade} + f_{abd} f_{cde} + f_{cad} f_{bde} = 0\,. \tag{2.26}$$

[2]ヤコビ恒等式は実際はこれよりもっと微妙である．生成子がヒルベルト空間の線形演算子でないような抽象的な群に対しても直接証明できる．その場合代数は，必ずしも交換子ではない “リー積” を含むが，ヤコビ恒等式を満たすのである．

を意味している．一組の行列 T_a を

$$[T_a]_{bc} \equiv -if_{abc} \tag{2.27}$$

で定義すると，(2.26) 式は次のように書ける．

$$[T_a, T_b] = i\, f_{abc} T_c \tag{2.28}$$

よって構造定数自身が代数の一つの表現をなす．この表現は**随伴表現**と呼ばれる．表現の**次元** とは,（有限群の場合と同様）それが働く線形空間の次元である．随伴表現の次元はちょうど独立な生成子の個数と同じで，それは群の元を記述するのに必要な実パラメータの個数である．f_{abc} たちは実数であるから，随伴表現の生成子は純虚数であることに注意しておこう．

随伴表現 (2.27) における生成子の線形空間上に，それを一つのベクトル空間に変えるため，便利なスカラー積を定義したい．良い一つの定義は，随伴表現でのトレースである．

$$\mathrm{Tr}(T_a T_b) \tag{2.29}$$

これは実対称行列である．次にこれを大変簡単な正準形に持って行けることを示そう．X_a に線形変換を行えば，構造定数の線形変換を引き起こすので，この形を変えることができる．線形変換

$$X_a \to X'_a = L_{ab} X_b \tag{2.30}$$

を行うと，

$$\begin{aligned} [X'_a, X'_b] &= i\, L_{ad} L_{be} f_{dec} X_c \\ &= i\, L_{ad} L_{be} f_{deg} L^{-1}_{gh} L_{hc} X_c \\ &= i\, L_{ad} L_{be} f_{deg} L^{-1}_{gc} X'_c \end{aligned} \tag{2.31}$$

となるので[3]

$$f_{abc} \to f'_{abc} = L_{ad} L_{be} f_{deg} L^{-1}_{gc} \tag{2.32}$$

[3](2.32) 式中の L^{-1} のため，f_{abc} の 3 番目の添え字を他と違うように扱って，上付き添え字に書く —— ${f_{ab}}^c$，ということは意味のあることである．しかし我々はこの面倒くさい扱いは行わない．以下ですぐに，群と基底とを，$\mathrm{Tr}(T_a T_b) \propto \delta_{ab}$ が成り立つものに制限するつもりだからである．そうすると，X_a たちに対しては直交変換 $L^{-1} = L^T$ のみが許され，3 つの添え字は皆同じに扱える．

である．変換された f たちで新しい T_a たちを定義すれば，

$$[T_a]_{bc} \to [T'_a]_{bc} = L_{ad} L_{be} [T_d]_{eg} L^{-1}_{gc} \tag{2.33}$$

すなわち

$$[T_a] \to [T'_a] = L_{ad} L [T_d] L^{-1} \tag{2.34}$$

となる．言い換えると，X_a の線形変換は，T_a たちに対し，行列の相似変換と生成子をラベルする添え字 a の同じ線形変換を同時に含む線形変換を引き起こす．しかし相似変換の部分はトレースには効かないので，

$$\mathrm{Tr}(T_a T_b) \to \mathrm{Tr}(T'_a T'_b) = L_{ac} L_{bd} \, \mathrm{Tr}(T_c T_d) \tag{2.35}$$

である．したがって適当な L （ここでは直交行列で十分）を選べば，トレースを対角化できる．

$$\mathrm{Tr}(T_a T_b) = k^a \delta_{ab} \qquad (\ a \text{ の和はとらない}\ ) \tag{2.36}$$

未だ生成子のスケールを取り直す自由度（対角的 L の変換）があるので，たとえば，全ての零でない k^a たちを絶対値が 1 になるように選べる．しかし k^a たちの符号を変えることはできない (L が変換 (2.35) に二乗で入っているからである).

今の時点で，**我々は k^a たちが正であることを仮定する．これは我々がこの本で扱う代数の部類を規定する．** それらは**コンパクトリー代数**と呼ばれる．k^a のいくつかが零になる代数には，下で戻ってごく簡単に触れる[4]． それで我々は，便利なように選んだある正の λ を用いて，

$$\mathrm{Tr}(T_a T_b) = \lambda \, \delta_{ab} \tag{2.37}$$

ととる． この基底において構造定数は完全反対称である．なぜなら

$$f_{abc} = -i \, \lambda^{-1} \, \mathrm{Tr}([T_a, \, T_b] \, T_c) \tag{2.38}$$

と書くことができ，これはトレースの巡回対称性により完全反対称である．

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}([T_a, \, T_b] \, T_c) &= (T_a T_b T_c - T_b T_a T_c) \\ &= (T_b T_c T_a - T_c T_b T_a) = \mathrm{Tr}([T_b, \, T_c] \, T_a) \end{aligned} \tag{2.39}$$

[4] k_a たちのいくつかが負になる代数は，非自明な有限次元ユニタリー表現を持たない．このことはそれらがおもしろくないことを意味しているわけではない（ローレンツ群はその一つの例）が，我々はそれらを議論しない．

であるから，

$$f_{abc} = f_{bca}\,. \tag{2.40}$$

総合すれば，(2.19) と (2.40) は，f_{abc} の完全反対称性を意味する．

$$\begin{aligned} f_{abc} &= f_{bca} = f_{cab} \\ &= -f_{bac} = -f_{acb} = -f_{cba}\,. \end{aligned} \tag{2.41}$$

この基底においては，随伴表現はユニタリーである．なぜなら T_a が虚数で反対称，よってエルミート行列だからである．

2.5 単純代数と単純群

不変部分代数とは，生成子の部分集合で，その代数の任意の元との交換関係のもとで自分自身に写されるものをいう．すなわち，X を不変部分代数の任意の生成子，Y を全体の代数の任意の生成子，とすれば，$[Y, X]$ は，その不変部分代数の生成子となる．指数関数の肩にのせれば，不変部分代数は不変部分群を生成する．これを見るため，次式に注意する．

$$h = e^{iX}\,, \quad g = e^{iY} \tag{2.42}$$

$$g^{-1} h\, g = e^{iX'} \tag{2.43}$$

ここで，

$$X' = e^{-iY} X e^{iY} = X - i\,[Y,\, X] - \frac{1}{2}\,[Y,\, [Y,\, X]] + \cdots\,. \tag{2.44}$$

である．これを理解する簡単な方法は，

$$X'(\epsilon) = e^{-i\epsilon Y} X e^{i\epsilon Y} \tag{2.45}$$

を考えて，ϵ でテーラー展開した後 $\epsilon = 1$ と置くことである．微分する毎に，交換子がもう一つ現れる．明らかに，X' の項の各々はその部分代数に入っているので，$e^{iX'}$ はその部分群に入っており，それゆえ，その部分群は不変である．

全体の代数，および 0 (だけからなる代数) は，自明な部分代数である．自明でない不変部分代数を一つも含まない代数は，**単純** (simple) と呼ばれる．単純代数は**単純群**を生成する．

(2.37) を満たす単純リー代数の随伴表現は既約である．これを証明するため，既約でないと仮定しよう．そうすると，随伴表現の中に不変部分空間が存在する．しかし随伴表現の中の状態は生成子に対応するので，それは，適当な基底がとれて，生成子の部分集合 T_r $(r = 1, \cdots, K)$ でその不変部分空間が張られる，ということを意味する．残りの生成子を T_x $(x = K + 1, \cdots, N)$ と呼ぼう．そうすると，ラベル r が不変部分空間に対応するので，

$$[T_a]_{xr} = -i\, f_{axr} = 0 \tag{2.46}$$

が，全ての a, x, r に対し成り立たねばならない．構造定数の完全反対称性を使えば，これは，r 添え字が二つと x 添え字一つ，及び，x 添え字二つと r 添え字一つ，の f が消えることを意味する．しかしそれは，構造定数が零でないのは，三つとも r 添え字か，三つとも x 添え字の場合しかない，ことを意味し，代数が二つの非自明な不変部分代数に分かれること，よって単純でないことを意味している．したがって，(2.37) を満たす単純リー代数の随伴表現は既約である．

群 (あるいは興味のある部分群) の全ての生成子と可換な一つの生成子からなる特別なアーベル不変部分代数を議論することが，しばしば有用になる．我々はそのような代数を，群の $U(1)$ 因子と呼ぶ．$U(1)$ は位相変換の群である．$U(1)$ 因子たちは，構造定数に全く姿を現さない．これらのアーベル不変部分代数たちは，生成子の空間で (2.36) の k_a が 0 となる方向に対応している．X_a を $U(1)$ 生成子とすると，すべての b, c に対し $f_{abc} = 0$ である．これは，対応する k^a が 0 であり，トレースのスカラー積がその空間でノルムを与えないことを意味している．構造定数は $U(1)$ 部分代数たちに関しては何も教えてくれないのである．

アーベル不変部分代数を持たない代数は，**半単純** (semisimple) と呼ばれる．後に見るようにそれらは単純代数を結合することにより構成される．これらの代数においては，各生成子はある他の生成子と零でない交換子を持つ．

構造定数の巡回対称性 (2.38) のため，このことはまた，全ての生成子が，生成子の交換子の線形結合で与えられることも意味している．そのような場合，構造定数は相当な情報を担っている．我々はそれらを用いて代数とその表現の全構造を決定するだろう．これより後は，あらわに断らない限り，半単純代数を議論することとし，ユニタリー演算子による表現を扱うことにする．

2.6 状態と演算子

有限群の表現を議論した時に見たように，ある表現における生成子は（それらの生成する表現の元と同様），線形演算子とも行列とも見なすことができる——

$$X_a|i\rangle = |j\rangle\langle j|X_a|i\rangle = |j\rangle[X_a]_{ji} \tag{2.47}$$

ここで j についての和は了解しておく．(1.98) に於けるように，状態は行ベクトルを成し，線形演算子を表現する行列は右側から掛かる．

表現が働くヒルベルト空間において，群の元は状態に対する変換と見なすことができる．群の元 $e^{i\alpha_a X_a}$ は，ケット (ベクトル) を次のように写像，もしくは**変換**する:

$$|i\rangle \to |i'\rangle = e^{i\alpha_a X_a}|i\rangle \,. \tag{2.48}$$

共役をとれば，対応するブラ (ベクトル) が

$$\langle i| \to \langle i'| = \langle i|e^{-i\alpha_a X_a} \,. \tag{2.49}$$

と変換することがわかる．演算子 O を $|i\rangle$ に作用させて得られるケットはケットたちの和であるので，(2.48) 式のように変換せねばならない．

$$\begin{aligned} O|i\rangle &\to e^{i\alpha_a X_a}O|i\rangle \\ &= e^{i\alpha_a X_a}Oe^{-i\alpha_a X_a}e^{i\alpha_a X_a}|i\rangle = O'|i'\rangle \,. \end{aligned} \tag{2.50}$$

このことは，任意の演算子 O が次のように変換することを意味している:

$$O \to O' = e^{i\alpha_a X_a}Oe^{-i\alpha_a X_a} \,. \tag{2.51}$$

変換は全ての行列要素を不変に保つ．

これらの対象への代数の作用は，無限小変換のもとでの状態ないしは演算子の変化に関係している．

$$-i\delta|i\rangle = -i\left((1+i\alpha_a X_a)|i\rangle - |i\rangle\right) = \alpha_a X_a|i\rangle \tag{2.52}$$

$$-i\delta\langle i| = -\langle i|\alpha_a X_a \tag{2.53}$$

$$-i\delta O = [\alpha_a X_a,\, O] \,. \tag{2.54}$$

よって，生成子 X_a のケットへの作用

$$X_a|i\rangle \tag{2.55}$$

に対応するものは，ブラに作用する $-X_a$

$$-\langle i|X_a \tag{2.56}$$

および，X_a の演算子との交換子

$$[X_a, O]\ . \tag{2.57}$$

である[5]． この時行列要素 $\langle i|O|i\rangle$ の不変性は次の事実で表される:

$$\langle i|O\,(X_a|i\rangle) + \langle i|\,[X_a, O]\,|i\rangle - (\langle i|X_a)\,O|i\rangle = 0\,. \tag{2.58}$$

2.7 指数関数の愉しみ

X_a が表現行列の場合の指数関数

$$e^{i\alpha_a X_a} \tag{2.59}$$

を考えよう．我々は常に指数関数を冪級数

$$e^{i\alpha_a X_a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha_a X_a)^n}{n!} \tag{2.60}$$

として定義することができる．しかしながら，これらの量を展開しないで扱うための，可換な数の指数関数に対する簡単な規則と同様な規則をいくつか開発しておくことが有用である．我々は既に，掛け算が単に指数部の足し算になるという程簡単ではないことを見た．読者は，微積分ももっと複雑になるだろうと予想するかもしれない．特に，

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_b} e^{i\alpha_a X_a} \neq iX_b\, e^{i\alpha_a X_a}\ . \tag{2.61}$$

しかしながら，

$$\frac{d}{ds} e^{is\alpha_a X_a} = i\alpha_b X_b\, e^{is\alpha_a X_a} = ie^{is\alpha_a X_a}\, \alpha_b X_b \tag{2.62}$$

[5] 上の議論は，(2.56) におけるマイナス符号や (2.57) における交換子は，結局のところ，変換 (2.48) がユニタリーであることに起因している，と要約できる．

の式は正しい．というのは $\alpha_a X_a$ が自分自身とは可換だからである．これは，それからしばしば他の有用な結果を導くことができるので大変重要である．直接展開すれば示せるように，式

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_b}\, e^{i\alpha_a X_a}\Big|_{\alpha=0} = iX_b \tag{2.63}$$

も成り立つ．微分に対する一般式を知っていれば時々役に立つ．それは美しい公式でもあるので，ここに書き下し，導き方も述べよう．その公式は

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_b} e^{i\alpha_a X_a} = \int_0^1 ds\, e^{is\alpha_a X_a}\,(iX_b)\,e^{i(1-s)\alpha_c X_c} \tag{2.64}$$

私はこの関係式が好きだ．全く自明でない式で，にもかかわらず大変覚えやすいからだ．積分は単に，微分が，指数関数の「内部」のどの場所に作用しても良い，という事実を表現しており，微分が掛かる全ての場所についての平均という結果である．これを導く一つの方法は，指数関数を (2.7) 式のような極限

$$e^{i\alpha_a X_a} = \lim_{k\to\infty}(1 + i\alpha_a X_a/k)^k \tag{2.65}$$

で定義し，両辺を微分することである —— そうすると，(2.64) 式が出ることは，ちょうど積分を和の極限として定義する際の練習問題である．もう一つ別の導き方は，(2.64) 式の両辺を展開し，有名な公式

$$\int_0^1 ds\, s^m\,(1-s)^n = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!} \tag{2.66}$$

を使うことである．この本の先に行くにつれて，行列の指数関数について他の色々な性質を見るだろう．

問題

2.A.　A を次の行列とした時，$e^{i\alpha A}$ の行列要素を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.B. $[A,\, B] = B$ の時，次式を計算せよ．

$$e^{i\alpha A}\, B\, e^{-i\alpha A}$$

2.C. (2.11) 式および (2.12) 式において，δ_c の展開を，α と β に関して (本文でやったより一次高い) 3 次まで実行せよ．

第3章

$SU(2)$

$SU(2)$ 代数はおなじみのものである[1].

$$[J_j,\, J_k] = i\epsilon_{jk\ell} J_\ell \ . \tag{3.1}$$

これは，ϵ_{ijk} ($i,j,k = 1,\cdots,3$) が 3 つの添え字を持つ完全反対称なもので最も簡単な可能性であるから，コンパクト・リー代数の中で最も簡単な物である. (3.1) は，量子力学で勉強した ($\hbar = 1$ の単位を取ったときの) 角運動量代数と同じである. 実際，ここでは 2 点だけ違ったことをする. 一つは，生成子を x, y, z ではなしに，1, 2, 3 とラベルすること. これは明らかに大きな前進である. もっと重要なのは，我々が決して $J_a J_a$ のような演算子を使わない，という事実である. この点は，最初は，分析を少し複雑にするけれど，後に他の全てのコンパクト・リー代数に見事に一般化される方法への糸口を与えるのである.

3.1 J_3 の固有状態

我々の究極のゴールは，世界のヒルベルト空間をブロック対角な形に完全に帰着させることである. この手続きを始めるため，次元 N のある有限空間を考え，それがその代数のある既約表現として変換するとしよう. そうすると，代数の形が表現について何を教えてくれるかを理解することができる. 明らかに，代数の元のうち，できるだけ多くを対角化したい. 今の場合，どれも他のどれとも交換しないので，ただ一つの元だけが対角化できる. それを J_3 にとっておく. そうした上で J_3 の最高値を持つ状態を選び出す (有限次元と仮定したので

[1]なぜ $SU(2)$ という名前が適当なのかは後でわかる.

それは常にできる）．J_3 の最高値を j と呼ぼう．そうすると我々は

$$J_3|j,\alpha\rangle = j|j,\alpha\rangle \tag{3.2}$$

を満たす状態の組を得る．ここで α は，J_3 の最高値 j を持つ状態が二つ以上存在する場合のみ必要な別のラベルである．(もちろん，最高値の状態が一つだけで実は α を必要としないことを読者は知っているだろう．しかしここでは未だそれを示してはいないので，それを保っておく．） 状態たちは常に次の正規直交性を持つように選ぶことができる．

$$\langle j,\alpha|j,\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta} \tag{3.3}$$

3.2 昇・降演算子

初歩の量子力学でやったように，昇演算子 (raising operator) と降演算子 (lowering operator) を定義する．

$$J^\pm = (J_1 \pm iJ_2)/\sqrt{2} \tag{3.4}$$

これらは

$$\left[J_3,\, J^\pm\right] = \pm J^\pm \tag{3.5}$$

$$\left[J^+,\, J^-\right] = J_3 \tag{3.6}$$

を満たすので，状態の上で J_3 の値を上げ下げする．実際，

$$J_3|m\rangle = m|m\rangle \tag{3.7}$$

とすれば，

$$J_3J^\pm|m\rangle = J^\pm J_3|m\rangle \pm J^\pm|m\rangle = (m \pm 1)\, J^\pm|m\rangle\ . \tag{3.8}$$

鍵となる考えは，昇・降演算子を用いて既約表現を構成し，可約表現を完全に縮約できるということである．この考えは $SU(2)$ に対しては大変簡単であるが，それを任意のコンパクト・リー代数に一般化する前に，この簡単な場合にどう働くのかを見ておくことは極めて有用である．

j が J_3 の最高値であるとの仮定から，J_3=j+1 を持つ状態は存在しない．したがって，

$$J^+|j,\alpha\rangle = 0 \;\; \forall\, \alpha \tag{3.9}$$

でなければならない．もしゼロでない状態なら $J_3{=}j{+}1$ の値を持つからである．降演算子を作用させて得られる状態は $J_3{=}j{-}1$ を持つ，よって状態

$$J^-|j,\alpha\rangle \equiv N_j(\alpha)|j-1,\alpha\rangle \tag{3.10}$$

を定義することは意味をなす．ここで $N_j(\alpha)$ は規格化因子である．異なる α を持つ状態が直交していることを示すのは容易である．実際

$$\begin{aligned}
&N_j(\beta)^* N_j(\alpha)\langle j-1,\beta|j-1,\alpha\rangle \\
&= \langle j,\beta|J^+J^-|j,\alpha\rangle \\
&= \langle j,\beta|\left[J^+,\ J^-\right]|j,\alpha\rangle \\
&= \langle j,\beta|J_3|j,\alpha\rangle \\
&= j\langle j,\beta|j,\alpha\rangle = j\ \delta_{\alpha\beta}\ .
\end{aligned} \tag{3.11}$$

したがって，状態たち $|j-1,\alpha\rangle$ は，規格化因子を

$$N_j(\alpha) = \sqrt{j} \equiv N_j \tag{3.12}$$

と選べば，正規直交となる．そうすると (3.10) に加えて，

$$\begin{aligned}
J^+|j-1,\alpha\rangle &= \frac{1}{N_j}J^+J^-|j,\alpha\rangle \\
&= \frac{1}{N_j}\left[J^+,\ J^-\right]|j,\alpha\rangle \\
&= \frac{j}{N_j}|j,\alpha\rangle = N_j|j,\alpha\rangle
\end{aligned} \tag{3.13}$$

が成り立つ．代数のために，昇・降演算子が α を変えることなしに作用して，これらの状態を定義できる，ということがポイントである．これがパラメータ α が最終的になくなってしまう理由である．さて，同様な議論で，次式を満たす正規直交状態 $|j-2,\alpha\rangle$ があることが示せる．

$$\begin{aligned}
J^-|j-1,\alpha\rangle &= N_{j-1}|j-2,\alpha\rangle \\
J^+|j-2,\alpha\rangle &= N_{j-1}|j-1,\alpha\rangle
\end{aligned} \tag{3.14}$$

これを続けて，[2]

$$
\begin{aligned}
J^-|j-k,\alpha\rangle &= N_{j-k}|j-k-1,\alpha\rangle \\
J^+|j-k-1,\alpha\rangle &= N_{j-k}|j-k,\alpha\rangle
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

を満たす正規直交状態の全タワー $|j-k,\alpha\rangle$ を見つけることができる．

規格化因子 N は，実数に取れ，代数により次式を満たす．

$$
\begin{aligned}
N_{j-k}^2 &= \langle j-k,\alpha|J^+J^-|j-k,\alpha\rangle \\
&= \langle j-k,\alpha|\,[J^+,\,J^-]\,|j-k,\alpha\rangle \\
&\quad +\langle j-k,\alpha|J^-J^+|j-k,\alpha\rangle \\
&= N_{j-k+1}^2 + j - k
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

これは N たちに対する回帰方程式で，N_j から出発して簡単に解ける:

$$
\begin{array}{ccccl}
N_j^2 & & & = & j \\
N_{j-1}^2 & - & N_j^2 & = & j-1 \\
 & \vdots & & \vdots & \\
N_{j-k}^2 & - & N_{j-k+1}^2 & = & j-k \\
\hline
N_{j-k}^2 & = & (k+1)j - k(k+1)/2 & & \\
 & = & \frac{1}{2}(k+1)(2j-k) & &
\end{array}
\tag{3.17}
$$

あるいは，$k=j-m$ ととれば，

$$
N_m = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\,. \tag{3.18}
$$

表現は有限次元 (これは仮定 —— 我々はこれを証明していない) であるから，$|j,\alpha\rangle$ に適用できる降演算子の最大の回数 ℓ が存在しなければならない．我々は

[2](訳者注) (3.15) の第一式は，N_{j-k} および，ラベル α を持つ状態 $|j-k-1,\alpha\rangle$ の定義，と見なせる．しかし，それに J^+ を作用させて第二式が得られることは，(3.13) 程すぐにはわからない．一旦，$J^+|j-k-1,\alpha\rangle = N'_{j-k}|j-k,\alpha'\rangle$ としておいて，帰納的に示す必要がある．特に，$\alpha'=\alpha$ が重要．

最終的には，それ以上降演算子を適用してもゼロになるというある $m=j-\ell$ に到達する．その時 ℓ は，最高の J_3 を持った状態の J_3 を下げることのできる回数を指定する，非負の整数である．その状態はもう一度降演算子を作用させると消える ——

$$J^-|j-\ell,\alpha\rangle = 0\,. \tag{3.19}$$

この時，$J^-|j-\ell,\alpha\rangle$ のノルムも消えるので，

$$N_{j-\ell} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(2j-\ell)(\ell+1)} = 0 \tag{3.20}$$

を意味する．因子 $\ell+1$ はゼロでないから，

$$\ell = 2j\,. \tag{3.21}$$

を得る．かくして

$$j = \frac{\ell}{2} \quad (\,\ell\text{: ある整数}\,) \tag{3.22}$$

ここで我々は α を取り除くことができる．生成子は α の値を変えないので，空間が，α の各値に対応した，代数の下で不変な部分空間たちに分解することは，今や明らかである．したがって，我々のもともとの既約性の仮定により，ただ一つの α の値しか存在せず，よって全く α を落としてしまうことができる．さらに，他の状態は存在できない，さもなくば，我々が上で構成した部分空間は非自明 (で不変) である．かくして我々は，すべての有限次元既約表現に対し，生成子がどのように作用するかを学んだ．実際，証明はしないけれど，他にはない —— すなわち，全ての既約表現は有限次元であって，我々はそれら全てを知っている訳である．

3.3 標準記法

我々はここで，既約表現の状態を，その表現での J_3 の最高の値と，J_3 の値とでラベルする，標準記法に切り換える:[3]

$$|j,m\rangle \tag{3.23}$$

[3]いや，完全に標準というわけではない —— このテキストの第一版を含め，いくつかの本では，j と m が逆の順に書かれている．

生成子の行列要素は，J_3 と昇・降演算子 $J^{\pm}$ の行列要素で決定される:[4]

$$\begin{aligned}\langle j,m'|J_3|j,m\rangle &= m\,\delta_{m'm}\\ \langle j,m'|J^+|j,m\rangle &= \sqrt{(j+m+1)(j-m)/2}\,\delta_{m',m+1}\\ \langle j,m'|J^-|j,m\rangle &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)/2}\,\delta_{m',m-1}\end{aligned} \tag{3.24}$$

これらの行列要素は $SU(2)$ 代数ののスピン j 表現を定義している:

$$[J_a^j]_{k\ell} = \langle j,j+1-k|J_a|j,j+1-\ell\rangle \tag{3.25}$$

ここで我々は，行と列を 1 から $2j+1$ まででラベルする通常の言葉で行列要素を書いた．この場合，行と列を直接 m の値 (それは上の (3.25) でで $j+1-\ell$ と $j+1-k$ である) でラベルする方がしばしば便利である．この記法では，(3.25) は

$$[J_a^j]_{m'm} = \langle j,m'|J_a|j,m\rangle \tag{3.26}$$

と書け，m と m' は j から $-j$ まで -1 刻みで走る．我々はこれらを交互に，扱う問題にとって最も便利な方を選んで使う．

例えば，1/2 に対し，これはスピン 1/2 表現

$$\begin{aligned}J_1^{1/2} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_1\\ J_2^{1/2} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_2\\ J_3^{1/2} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_3\end{aligned} \tag{3.27}$$

を与える．ここで σ は，パウリ行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{3.28}$$

[4] $\sqrt{2}$ の因子は，昇・降演算子に対する我々の定義から来ており，他の扱いでは現れないこともある．

であり，

$$\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} + i\epsilon_{abc}\sigma_c \tag{3.29}$$

を満たす．スピン 1/2 表現は $SU(2)$ の最も簡単な表現である．それは $SU(2)$ の "定義" 表現と呼ばれ，"特殊ユニタリー (**S**pecial **U**nitary)" の頭文字である SU という名前の由来を与える．群の有限な元の表現を得るため，スピン 1/2 表現の生成子を指数関数の肩にのせれば，

$$e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}/2} \tag{3.30}$$

の形の行列が得られる．これは，行列式 が 1 の最も一般的な 2×2 ユニタリー行列である．特殊ユニタリーの "特殊 (special)" とは，行列式が，絶対値 1 の勝手な複素数ではなく，1 である，ことを意味している．

他の既約表現も全て同様に構成できる．例えば，スピン 1 表現は，

$$J_1^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_3^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J_2^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

となり，スピン 3/2 表現は次のようになる．

$$J_1^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \end{pmatrix} \quad J_3^{3/2} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$J_2^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}}i & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{3}{2}}i & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 2i & 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}}i \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}}i & 0 \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

後で見るように，上の既約表現の構成は任意のコンパクト・リー代数に一般化される．J_3 の値は，**ウェイト** (weight) と呼ばれ，我々のやった分析は，表現の最高のウェイト (highest weight) を持つ一意的な状態から出発するので**最高**

ウェイトによる構成と呼ばれる．同じ構成法が，任意の有限次元表現をブロック対角の形に持ってゆく系統的な手続きを与えることにも注意したい．この手続きは以下のものである:

1. J_3 を対角化する．

2. J_3 の最高の値，j を持つ状態を見つける．

3. その各々の状態に対して，最高の J_3 を持った状態に降演算子を適用してスピン j の既約表現をあらわに構成する．

4. ここで，標準的な形になったこれらの表現で張られる部分空間を除去し，それに直交する部分空間に集中する．

5. これらの残っている状態に対しステップ 2 へ行き，J_3 の次の最高値を持った状態から再び始める．

(3.33)

最終の結果としては，

$$|j, m, \alpha\rangle \tag{3.34}$$

の形のヒルベルト空間の基底を構成することとなる．ここで m と j は いつものように ((3.23) におけるように) J_3 の値と表現 をあらわし，α は状態を特徴付けるために対角化できる他の観測可能量全てをラベルしている．これらは

$$\langle j', m', \alpha' | j, m, \alpha\rangle = \delta_{m'm}\,\delta_{j'j}\,\delta_{\alpha'\alpha} \tag{3.35}$$

を満たす．クロネッカーの δ は，われわれの構成法の自動的な結果である．それらは Schur の補題からも要求される．なぜなら，行列要素は，中間状態の完全系を J_a のどちら側にも挿入できるので

$$\begin{aligned}
&\langle j', m', \alpha' | J_a | j, m, \alpha\rangle \\
&= [J_a^{j'}]_{m'm''}\langle j', m'', \alpha' | j, m, \alpha\rangle \\
&= \langle j', m', \alpha' | j, m'', \alpha\rangle [J_a^{j}]_{m''m}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

を満たさねばならない，からである．すなわち，$\langle j', m', \alpha' | j, m, \alpha\rangle$ は既約表現の全ての元と可換であり，$j \neq j'$ の場合に 0 になっているか，$j = j'$ の時に単位行列 $\delta_{m'm}$ に比例しているか，のどちらかである．

3.4 テンソル積

読者は皆，初等的な量子力学において**角運動量の足し算** (合成) と呼ばれる演算をするときに，たぶんそれと知らず最高ウェイトによる構成法を使っている．これは，群の下で変換する二組の状態の**テンソル積** (tensor product) を作る時に起こる[5]．これは，言い換えれば，系が群の変換に対して二通り以上の仕方で応答する場合にはいつも起こることである．これの古典的な例は，スピンと軌道角運動量の両方を持った粒子である．この場合，系は二つの異なる種類のケットの積で作られると見なせる空間において記述される．

$$|i, x\rangle \equiv |i\rangle\,|x\rangle \tag{3.37}$$

ここで最初の状態，$|i\rangle$ は群の表現 D_1 で変換し，二番目の $|x\rangle$ は D_2 で変換する． そうすると，テンソル積と呼ばれる，この積は次のように変換する:

$$\begin{aligned} D(g)\,|i, x\rangle &= |j, y\rangle\,[D_{1\otimes 2}(g)]_{jyix} \\ &= |j\rangle\,|y\rangle\,[D_1(g)]_{ji}\,[D_2(g)]_{yx} \\ &= (|j\rangle\,[D_1(g)]_{ji})\,(|y\rangle\,[D_2(g)]_{yx}) \end{aligned} \tag{3.38}$$

言い換えれば，二つのケットは，単にそれぞれの表現に従い独立に変換している．これを単位元の近傍で見れば，無限小の α_a に対し，

$$\begin{aligned} &(1 + i\alpha_a J_a)\,|i, x\rangle \\ &= |j, y\rangle\langle j, y|\,(1 + i\alpha_a J_a)\,|i, x\rangle \\ &= |j, y\rangle\,\left(\delta_{ji}\delta_{yx} + i\alpha_a[J_a^{1\otimes 2}(g)]_{jy\,ix}\right) \\ &= |j, y\rangle\left(\delta_{ji} + i\alpha_a[J_a^1]_{ji}\right)\left(\delta_{yx} + i\alpha_a[J_a^2]_{yx}\right)\ . \end{aligned} \tag{3.39}$$

よって，α_a の 1 次項を等値すれば

$$[J_a^{1\otimes 2}(g)]_{jy\,ix} = [J_a^1]_{ji}\delta_{yx} + \delta_{ji}[J_a^2]_{yx}\ . \tag{3.40}$$

[5]我々は，有限群の議論における三角形の基準モードにおいてこの例を見た．

表現の掛け算をすると，生成子は，(3.40) に示した意味で足し算になる．これは，角運動量の足し算において起こっていることである．我々は (3.40) をしばしば簡単に

$$J_a^{1\otimes 2} = J_a^1 + J_a^2 \tag{3.41}$$

と書いて，添え字がどうなるのかは読み手に任せ，適当な空間で結局は単位元にすぎない δ-関数は無視する．実際，これは，生成子の作用の言葉で次のようなものと考えることができる:

$$J_a\Big(|j\rangle|x\rangle\Big) = \Big(J_a|j\rangle\Big)|x\rangle + |j\rangle\Big(J_a|x\rangle\Big) \tag{3.42}$$

3.5　J_3 の値は足される

J_3 が対角の基底で考えているので，このことは生成子 J_3 に対しては特に単純である．すなわち**テンソル積の状態の J_3 の値は，因子の J_3 の値の単なる和である:**

$$J_3\Big(|j_1,m_1\rangle|j_2,m_2\rangle\Big) = (m_1+m_2)\Big(|j_1,m_1\rangle|j_2,m_2\rangle\Big) \tag{3.43}$$

もちろん，これは我々が，古典的に，角運動量の和に対して期待することである．しかし量子論においては，それは一成分に対してうまくいくだけである．しかし，我々はこれを最高ウェイトによる構成，(3.33)，において使うことができる．

例として，スピン 1/2 とスピン 1 の表現のテンソル積を考えよう．最高ウェイトの手続き (3.33) は，積の空間を既約表現に分解するのに使うものである．それをあらわにやってみよう．一意的な最高ウェイトの状態

$$|3/2,3/2\rangle = |1/2,1/2\rangle|1,1\rangle \tag{3.44}$$

がある．スピン 3/2 の残りの状態は，降演算子を両辺に適用して構成できる．例えば，(3.42) を用いて

$$\begin{aligned} J^-|3/2,3/2\rangle &= J^-\Big(|1/2,1/2\rangle|1,1\rangle\Big) \\ = \sqrt{\frac{3}{2}}|3/2,1/2\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}}|1/2,-1/2\rangle|1,1\rangle + |1/2,1/2\rangle|1,0\rangle \end{aligned} \tag{3.45}$$

あるいは，

$$|3/2,1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|1/2,-1/2\rangle|1,1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1/2,1/2\rangle|1,0\rangle \ . \tag{3.46}$$

この手続きを続けて，

$$\begin{aligned} |3/2,-1/2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|1/2,-1/2\rangle|1,0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1/2,1/2\rangle|1,-1\rangle \\ |3/2,-3/2\rangle &= |1/2,-1/2\rangle|1,-1\rangle \end{aligned} \tag{3.47}$$

を得る．そこで残りの状態は，これらに直交する ——

$$\sqrt{\frac{2}{3}}|1/2,-1/2\rangle|1,1\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|1/2,1/2\rangle|1,0\rangle \tag{3.48}$$

と

$$\sqrt{\frac{1}{3}}|1/2,-1/2\rangle|1,0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1/2,1/2\rangle|1,-1\rangle \ . \tag{3.49}$$

この小さくなった空間に最高ウェイト図式を適用すれば，

$$\begin{aligned} |1/2,1/2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|1/2,-1/2\rangle|1,1\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|1/2,1/2\rangle|1,0\rangle \\ |1/2,-1/2\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}|1/2,-1/2\rangle|1,0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1/2,1/2\rangle|1,-1\rangle \end{aligned} \tag{3.50}$$

を得る．この場合，全ての状態を使い切ったので，手続きはこれで終わる．スピン 1/2 状態の符号は，スピン 3/2 状態に直交する状態を求めた時に決まらなかったこと，しかし，$J_3 = \pm 1/2$ の状態は昇・降演算子で関係づけられているので**相対**符号は決まっていること，に注意したい．

問題

3.A. 最高ウェイトによる分解，(3.33)，を用いて，

$$\{j\} \otimes \{s\} = \sum_{\oplus \ell = |s-j|}^{s+j} \{\ell\}$$

を示せ．ただし，総和における $\oplus$ は，単に和が直和であることを意味し，$\{k\}$ は，$SU(2)$ のスピン k 表現を表す．この問題をやるには，各々の既約表現に現れる正確な線形結合の状態を作る必要はない．が少なくとも，最高ウェイトによる分解の各段階で，状態の数勘定がどうなるのかは示さねばならない．

3.B. $\vec{\sigma}$ をパウリ行列としたとき

$$e^{i\vec{r}\cdot\vec{\sigma}}$$

を計算せよ．ヒント: $\vec{r} = |\vec{r}|\,\hat{r}$ と書け．

3.C. $j = 1$ に対して最高ウェイトの手続きで得られるスピン 1 表現が，$f_{abc} = \epsilon_{abc}$ を持つ随伴表現と同値であることを，同値性を確立する相似変換を見つけてあらわに示せ．

3.D. $[\sigma_a]_{ij}$ と $[\eta_a]_{xy}$ を，二つの異なる 2 次元空間におけるパウリ行列とする．4 次元のテンソル積の空間で，基底を

$$|1\rangle = |i=1\rangle|x=1\rangle \qquad |2\rangle = |i=1\rangle|x=2\rangle$$

$$|3\rangle = |i=2\rangle|x=1\rangle \qquad |4\rangle = |i=2\rangle|x=2\rangle$$

と選ぶ．この基底で $\sigma_2 \otimes \eta_1$ の行列要素を求めよ．

3.E. テンソル積の記号は，しばしば，添え字や単位行列を省略した形に略記される．これは記号を大変コンパクトにする点では良いのだが，正しい空間がどこかについて気を配っておかねばならない．問題 3.D の例では，次のように書く:

$$\begin{aligned} [\sigma_a]_{ij}[\eta_b]_{xy} &\rightarrow \sigma_a\eta_b \\ [\sigma_a]_{ij}\delta_{xy} &\rightarrow \sigma_a \\ \delta_{ij}[\eta_b]_{xy} &\rightarrow \eta_b \\ \delta_{ij}\delta_{xy} &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

それで例えば，$(\sigma_1)(\sigma_2\eta_1) = i\sigma_3\eta_1$ や $(\sigma_1\eta_2)(\sigma_1\eta_3) = i\eta_1$.

この記法の手慣らしをするため，次の計算をせよ:

(a) $[\sigma_a,\, \sigma_b\eta_c]$,

(b)　$\mathrm{Tr}\left(\sigma_a\left\{\eta_b,\, \sigma_c\eta_d\right\}\right)$;

(c)　$\left[\sigma_1\eta_1,\, \sigma_2\eta_2\right]$.

ただし，σ_a と η_a は，独立なパウリ行列の組で，$\{A,B\} = AB + BA$ は “反交換子” である．

第4章

テンソル演算子

テンソル演算子 (tensor operator) とは，あるリー代数の生成子との交換関係の下で，代数の既約表現のように変換する演算子の組である．この章では，第3章で議論した $SU(2)$ 代数に対するテンソル演算子を定義し議論する．$SU(2)$ のスピン s 表現として変換するテンソル演算子とは，添え字が $\ell = 1$ から $2s+1$ まで (または $-s$ から s まで) 走る演算子の組 O^s_ℓ から成り，交換関係

$$[J_a,\, O^s_\ell] = O^s_m\, [J^s_a]_{m\ell}\,. \tag{4.1}$$

を満たすものである．我々は証明はしなかったが，全ての既約表現は有限次元であり，我々が最高ウェイトによる構成で見つけた既約表現のどれかと同値である．$SU(2)$ の全てのテンソル演算子は，常にこの形を持つように選ぶことができる．

4.1 軌道角運動量

例を挙げよう —— 球対称なポテンシャルの中の一粒子．もし粒子がスピンを持っていなければ，J_a は 軌道角運動量演算子

$$J_a = L_a = \epsilon_{abc}\, r_b\, p_c \tag{4.2}$$

である．位置ベクトルは，一つのテンソル演算子である．それは随伴表現として変換するからである:

$$\begin{aligned}[J_a,\, r_b] &= \epsilon_{acd}\,[r_c\, p_d,\, r_b] = -i\,\epsilon_{acd}\, r_c\, \delta_{bd} \\ &= -i\,\epsilon_{acb}\, r_c = r_c\,[J^{\rm adj}_a]_{cb}\end{aligned} \tag{4.3}$$

ここで $J^{\rm adj}$ は随伴表現であり，問題 3.C から我々は，この表現が最高ウェイトの手続きによる標準のスピン 1 表現と同値であることを知っている．

4.2 テンソル演算子を使う

位置演算子の (4.3) 式の変換則は，表現行列 $J_a^{\rm adj}$ が標準の形をとっていないので余り便利でない．テンソル演算子を使う際の第 1 ステップは，交換関係 (4.1) に標準のスピン s 表現が現れるような演算子の基底を選ぶことである．このことは絶対必要というわけではないが，以下に見るように物事を易しくする．この過程を先ず一般的に議論し，次にそれが r_a に対してどう働くのかを見る．

演算子の組 Ω_x $(x = 1, \cdots, 2s+1)$ が与えられ，それが $SU(2)$ のスピン s 表現と同値な表現 D に従って変換するものとしよう:

$$[J_a,\, \Omega_x] = \Omega_y\, [J_a^D]_{yx} \tag{4.4}$$

仮定により D はスピン s 表現と同値であるから，次式を満たす行列 S を見つけることができる:

$$S\, J_a^D\, S^{-1} = J_a^s \tag{4.5}$$

すなわち，行列要素で書けば，

$$[S]_{\ell x}\, [J_a^D]_{xy}\, [S^{-1}]_{y\ell'} = [J_a^s]_{\ell\ell'}\ . \tag{4.6}$$

そうすると，新しい演算子の組

$$O_\ell^s = \Omega_y\, [S^{-1}]_{y\ell} \quad (\ \ell = -s, \cdots, s\ ) \tag{4.7}$$

を定義すれば，O_ℓ^s は，望みの交換関係

$$\begin{aligned}
&[J_a,\, O_\ell^s] \\
&= [J_a,\, \Omega_y]\ [S^{-1}]_{y\ell} \\
&= \Omega_z [J_a^D]_{zy}\, [S^{-1}]_{y\ell} \\
&= \Omega_z [S^{-1}]_{z\ell'}\, [S]_{\ell' z'}\, [J_a^D]_{z'y}\, [S^{-1}]_{y\ell} \\
&= O_{\ell'}^s\, [J_a^s]_{\ell'\ell}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

を満たす．(4.8) 式は J_3 に対し特に簡単であることに注意しよう．添え字 ℓ が J_3 の値，J_3^1 (一般の s では J_3^s) をラベルする我々の標準の基底において，それは対角行列である:

$$[J_3^s]_{\ell'\ell} = \ell\, \delta_{\ell\ell'} \quad (\ \ell, \ell' = -s, \cdots, s)\,. \tag{4.9}$$

よって

$$[J_3,\, O_\ell^s] = O_{\ell'}^s\, [J_3^s]_{\ell'\ell} = \ell\, O_\ell^s\,. \tag{4.10}$$

実際には，行列 S をあらわに見つける必要はふつうない．Ω_x の何らかの線形結合で J_3 のある決まった値を持つもの (すなわち，J_3 との交換関係が自分自身に比例するもの) を見つけられれば，それを O^s のある成分に取り，O^s の他の全ての成分は昇・降演算子を適用することによって得ることができる．

位置演算子に関しては，先ず r_0 演算子を見つけることから始めるのが最も易しい．$[J_3,\, r_3] = 0$ であるから，r_3 が $J_3 = 0$ を持つことがわかり，したがって $r_3 \propto r_0$．よって

$$r_0 = r_3 \tag{4.11}$$

と採ることができる．そうすると，スピン 1 の昇・降演算子に対する交換関係が残りの状態を与える:

$$\begin{aligned} \left[J^\pm,\, r_0\right] &= r_{\pm 1} \\ &= \mp(r_1 \pm i\, r_2)/\sqrt{2}\,. \end{aligned} \tag{4.12}$$

4.3 Wigner-Eckart 定理

テンソル演算子に関しておもしろい点は，積 $O_\ell^s\, |j, m, \alpha\rangle$ がどのように変換するかである．

$$\begin{aligned} &J_a\, O_\ell^s\, |j, m, \alpha\rangle \\ &= [J_a,\, O_\ell^s]\ |j, m, \alpha\rangle + O_\ell^s\, J_a\, |j, m, \alpha\rangle \\ &= O_{\ell'}^s\, |j, m, \alpha\rangle\, [J_a^s]_{\ell'\ell} + O_\ell^s\, |j, m', \alpha\rangle\, [J_a^j]_{m'm} \end{aligned} \tag{4.13}$$

これはスピン s とスピン j のテンソル積に対する変換則である．我々は状態と演算子に対して J_3 が対角になる標準基底を使っているので，(4.13) は生成子 J_3 に対し特に簡単で，

$$J_3\, O^s_\ell\, |j,m,\alpha\rangle = (\ell+m)\, O^s_\ell\, |j,m,\alpha\rangle \tag{4.14}$$

となる．**テンソル演算子と状態の積に対する J_3 の値は，単に演算子と状態の J_3 値の和である．**

これに関して注目すべきは，テンソル演算子とケットの積が代数の下で，ちょうど二つのケットのテンソル積と同じように振る舞うことである．したがってそれは，最高ウェイトの手続きを用いて，全く同様に既約表現に分解することができる．

すなわち，先ず $J_3 = j+s$ を持つ $O^s_s\,|j,j,\alpha\rangle$ が最高ウェイト状態であることに注意する．これを下げて，スピン $j+s$ 表現の残りの状態を作ることができる．そして，$J_3 = j+s-1$ の状態たちの線形結合でスピン $j+s-1$ 表現の最高ウェイト状態になるものを見つけ，それを下げてその表現全体を作り，うんぬん．このようにして $O^s_\ell\,|j,m,\alpha\rangle$ の線形結合でテンソル積の既約成分の状態に対するあらわな表式を見いだすことができる．おそらく既知で，問題 3.A でもあらわに示したように，この分解において，スピン $j+s$ からスピン $|j-s|$ までの各表現がちょうど一回ずつ現れる．最高ウェイトによる解析の結果は次のように書ける:

$$\sum_\ell O^s_\ell\, |j, M-\ell, \alpha\rangle\, \langle s,j,\ell,M-\ell \mid J,M\rangle = k_J\, |J,M\rangle\ . \tag{4.15}$$

ここで $|J,M\rangle$ はスピン J 表現の $J_3 = M$ 成分のように振る舞う規格化された状態であり，k_J は各 J に対する (しかし M には依存しない) 未知の定数である．係数 $\langle s,j,\ell,M-\ell \mid J,M\rangle$ は最高ウェイトによる構成で決められ，二つのケットのテンソル積から求められる．後者では全ての規格化は知られており，定数 k_J は皆 1 である:

$$\sum_\ell |s,\ell\rangle\, |j,M-\ell\rangle\, \langle s,j,\ell,M-\ell \mid J,M\rangle = |J,M\rangle\ . \tag{4.16}$$

(4.15) 式と (4.16) 式において係数が同じにとれることを証明する[1]一つの方法は，両方の場合に，$J^+\,|J,J\rangle$ が消えなければならないこと，そしてその条件が係数

[1]これはたぶん明らかである，が以下で強調するように，演算子は，スカラー積を持たないので，(ケットとは) 異なる．

たち $\langle s, j, \ell, J-\ell \mid J, J\rangle$ を定数倍を除いて決めること，に注意することである．$O^s_\ell\,|j, m\rangle$ と $|s, \ell\rangle\,|j, m\rangle$ の変換性が同一なので，係数は比例しなければならない．唯一の違いは (4.15) の因子 k_J である．

(4.15) 式を逆に解けば，元の積状態を全スピン J が決まった状態の線形結合で表すことができる．

$$O^s_\ell\,|j, m, \alpha\rangle = \sum_{J=|j-s|}^{j+s} \langle J, \ell+m \mid s, j, \ell, m\rangle\, k_J\,|J, \ell+m\rangle \ . \tag{4.17}$$

この係数 $\langle J, M \mid s, j, \ell, M-\ell\rangle$ は，したがって，状態の位相の選び方を除けば，代数のみによって決められる．一旦これらの位相を固定する約束を置けば，これらの係数の表を作ることができる．これは一回だけやれば，それで終わりである．記号 $\langle J, \ell+m|s, j, \ell, m\rangle$ は，単に積 $|s, \ell\rangle\,|j, m\rangle$ における $|J, \ell+m\rangle$ の係数を表している．これらは **Clebsch-Gordan 係数**と呼ばれる．

Clebsch-Gordan 係数は全くの群論である．物理学は $|J, \ell+m\rangle$ をヒルベルト空間の基底状態 $|J, \ell+m, \beta\rangle$ で表し直すときに入ってくる ——

$$k_J\,|J, \ell+m\rangle = \sum_\beta k_{\alpha\beta}\,|J, \ell+m, \beta\rangle \tag{4.18}$$

ここで未知の係数 k_J は，同じく未知の係数 $k_{\alpha\beta}$ に吸収した．これらは，元の積状態が依存した α，j，O^s，s に依存し，さらに，もちろん，β と J にも依存する．しかし，ℓ や m には全く依存しない．我々は，$\ell+m$ の一つの値に対してだけその係数を知れば良い．$k_{\alpha\beta}$ は**既約行列要素** (reduced matrix element) と呼ばれ，

$$k_{\alpha\beta} = \langle J, \beta|\, O^s\,|j, \alpha\rangle \tag{4.19}$$

と記される．以上のことをまとめて，最終的に，テンソル演算子の行列要素に対する Wigner-Eckart 定理を得る:

$$\begin{aligned} &\langle J, m', \beta|\, O^s_\ell\,|j, m, \alpha\rangle \\ &= \delta_{m',\ell+m}\,\langle J, \ell+m|s, j, \ell, m\rangle \cdot \langle J, \beta|\, O^s\,|j, \alpha\rangle \end{aligned} \tag{4.20}$$

もしある与えられた J, β と j, α の状態間でのテンソル演算子の零でない行列要素をどれか知れば，我々は他の行列要素を全て代数を用いて計算できる．これはかなり驚くべきことに聞こえるが，実際に言っていることは，単に昇・降演

算子を用いれば純粋に群論により表現の中で上がったり下がったり出来るということに過ぎない．すなわち昇・降演算子をうまく用いれば任意の行列要素を別のものから計算できる．Wigner-Eckart 定理はこのことを単に形式的に表現しているだけである．

4.4 例

今

$$\langle 1/2, 1/2, \alpha | \, r_3 \, |1/2, 1/2, \beta\rangle = A \tag{4.21}$$

が与えられたとき，次の量を求めよう:

$$\langle 1/2, 1/2, \alpha | \, r_1 \, |1/2, -1/2, \beta\rangle = ? \tag{4.22}$$

まず，$r_0 = r_3$ であるから，

$$\langle 1/2, 1/2, \alpha | \, r_0 \, |1/2, 1/2, \beta\rangle = A \tag{4.23}$$

そこで (4.12) から

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-r_{+1} + r_{-1}) \tag{4.24}$$

がわかるので，

$$\begin{aligned} &\langle 1/2, 1/2, \alpha | \, r_1 \, |1/2, -1/2, \beta\rangle \\ &= \langle 1/2, 1/2, \alpha | \, \frac{1}{\sqrt{2}}(-r_{+1} + r_{-1}) \, |1/2, -1/2, \beta\rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1/2, 1/2, \alpha | \, r_{+1} \, |1/2, -1/2, \beta\rangle \ . \end{aligned} \tag{4.25}$$

ここでこれを公式に代入し，表から Clebsch-Gordan 係数を見つけることもできるだろう．しかし，正直に言えば，私はその公式における定義が使うには長すぎて決して覚えられない．私は，そのかわり，公式が意味するところを理解しようとする．読者にもそうするように勧めたい．$1/2 \otimes 1$ を既約表現に分解する，上で既にやったことを使うこともできる．例えば，最高ウェイトによる構成から

$$|3/2, 3/2\rangle \equiv r_{+1} \, |1/2, 1/2, \beta\rangle \tag{4.26}$$

が 3/2, 3/2 状態であることを知っている．これは r_ℓ 演算子が $|1/2,m\rangle$ 状態に作用している積から作れる最高ウェイトの状態だからである．降演算子 J^- を作用させれば同じ表現内の対応する $|3/2,1/2\rangle$ 状態を得ることができる．

$$
\begin{aligned}
|3/2,1/2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}\,J^-\,|3/2,3/2\rangle \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}}\,r_0\,|1/2,1/2,\beta\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,r_{+1}\,|1/2,-1/2,\beta\rangle\ .
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

ところが，このスピン 3/2 状態は任意のスピン 1/2 状態と直交することを知っているから，

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle 1/2,1/2,\alpha|\,3/2,1/2\rangle \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}}\langle 1/2,1/2,\alpha|\,r_0\,|1/2,1/2,\beta\rangle \\
&+ \sqrt{\frac{1}{3}}\langle 1/2,1/2,\alpha|\,r_{+1}\,|1/2,-1/2,\beta\rangle
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

であり，したがって

$$
\begin{aligned}
&\langle 1/2,1/2,\alpha|\,r_{+1}\,|1/2,-1/2,\beta\rangle \\
&= -\sqrt{2}\langle 1/2,1/2,\alpha|\,r_0\,|1/2,1/2,\beta\rangle \\
&= -\sqrt{2}\,A\ .
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

それゆえ

$$
\langle 1/2,1/2,\alpha|\,r_1\,|1/2,-1/2,\beta\rangle = A\ . \tag{4.30}
$$

ここでは必要ないが，我々は

$$
|1/2,1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\,r_0\,|1/2,1/2,\alpha\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\,r_{+1}\,|1/2,-1/2,\alpha\rangle \tag{4.31}
$$

が 1/2, 1/2 状態であることも結論できる．この言明は実際のところいくぶん微妙であるが，代数の威力を示している．我々がこの分析を $j{=}1$ と $j{=}1/2$ 状態のテンソル積に対して行ったときは，$|1/2,1/2\rangle$ 状態の形を見つけるため $|1/2,1/2\rangle$ が $|3/2,1/2\rangle$ 状態と直交しなければならないという事実を用いた．しかしここでは，対称性だけからは状態

$$
r_\ell\,|1/2,m\rangle \tag{4.32}
$$

のノルムをどう決めれば良いのかわからないので，そうすることはできない．しかしながら，状態に関する分析と，これらの対象の変換則が類似であるという事実とから，

$$J^+ |1/2, 1/2\rangle = 0 \tag{4.33}$$

であることがわかる．したがって，それは表現における最高ウェイト状態であり，よって 1/2, 1/2 状態である．我々は後にまたこの課題に立ち返る．

この種の問題にアプローチする方法は幾通りもある．ここではもう一つの方法を示そう．行列要素

$$\langle 1/2, m, \alpha| r_a |1/2, m', \beta\rangle \tag{4.34}$$

を考えよう．Wigner-Eckart 定理はこれらの行列要素が全て一つのパラメーター $k_{\alpha\beta}$ に比例することを意味している．さらにこの結果は代数だけからの結論である．J_a との交換関係が同じである演算子はどれも r_a に比例する行列要素を持つ．ところが，J_a 自身も同じ交換関係を持っている．したがって，r_a の行列要素は J_a のそれに比例する．これは，J_a の行列要素が零でない限り役に立つ．(もし全て零なら，Wigner-Eckart 定理は自明な意味で成り立つ．) 今の場合，(少なくとも $\alpha = \beta$ の場合は) それらは零でない．

$$\langle 1/2, m, \alpha| J_a |1/2, m', \beta\rangle = \delta_{\alpha\beta} \frac{1}{2} [\sigma_a]_{mm'} \tag{4.35}$$

よって

$$\langle 1/2, m, \alpha| r_a |1/2, m', \beta\rangle \propto [\sigma_a]_{mm'} \ . \tag{4.36}$$

これは上と同じ結果を与える．

4.5　* テンソル演算子を作る

生成子との交換関係のもとで，演算子の組が代数のある可約表現

$$[J_a, \Omega_x] = \Omega_y [J_a^D]_{yx} \tag{4.37}$$

(D は可約) として変換する，という場合に遭遇することはしばしばある．この場合，これらをテンソル演算子に変えるにはいくらかの作業が要る．しかしこの作業は本質的にはまたおなじみの最高ウェイトによる構成である．第1ステッ

プは J_3 の決まった値を持つ Ω_x 演算子の線形結合を作ることである．

$$[J_3,\, O_{m,\alpha}] = m\, O_{m,\alpha}\ . \tag{4.38}$$

このことは，D がこの性質を持つ既約表現に分解出来るので，常に可能である．そこで最高ウェイトの手続きを適用できて，最高ウェイトを持った**演算子**たち $O_{j,\alpha}$ は，各 α 毎に一つの，スピン j のテンソル演算子の成分である，と結論できる．もしウェイトが $j{-}1/2$ の演算子，$O_{j-1/2,\beta}$，が存在すれば，それらはスピン $j{-}1/2$ のテンソル演算子の成分であろう．しかしながら，ものごとは次の段階で微妙になり得る．スピン $j{-}1$ のテンソル演算子を見つけるため，J^+ との交換子が消える，ウェイトが $j{-}1$ の演算子の線形結合を見つけねばならない —— そうするとそれらはスピン $j{-}1$ 表現の最高ウェイトに対応する:

$$\left[J^+,\, O_{j-1,\gamma}\right] = 0\ . \tag{4.39}$$

ポイントは，もしランダムな基底で演算子が与えられた場合，スカラー積のようなものがなく，すでに表現に割り当てた演算子たちと "直交する" 演算子を簡単に見つけられない，ということである．一つの例がこの事情をより明確にしてくれるだろう．生成子と次の交換関係を持つ 7 つの演算子，$a_{\pm 1}$，$b_{\pm 1}$ および a_0，b_0，c_0 を考えよう:

$$\begin{gathered}
[J_3,\, a_{+1}] = a_{+1} \qquad [J_3,\, b_{+1}] = b_{+1} \\
[J_3,\, a_0] = [J_3,\, b_0] = [J_3,\, c_0] = 0 \\
[J_3,\, a_{-1}] = -a_{-1} \qquad [J_3,\, b_{-1}] = -b_{-1}
\end{gathered} \tag{4.40}$$

$$\begin{gathered}
\left[J^+,\, a_{+1}\right] = \left[J^+,\, b_{+1}\right] = 0 \\
\left[J^+,\, a_0\right] = a_{+1} \qquad \left[J^+,\, b_0\right] = b_{+1} \qquad \left[J^+,\, c_0\right] = a_{+1} - b_{+1} \\
\left[J^+,\, a_{-1}\right] = c_0 \qquad \left[J^+,\, b_{-1}\right] = \frac{1}{2}(a_0 + b_0 - 3c_0)
\end{gathered} \tag{4.41}$$

$$\begin{gathered}
\left[J^-,\, a_{+1}\right] = \frac{1}{2}(a_0 + b_0 + c_0) \qquad \left[J^-,\, b_{+1}\right] = \frac{1}{2}(a_0 + b_0 - c_0) \\
\left[J^-,\, a_0\right] = 2a_{-1} + b_{-1} \qquad \left[J^-,\, b_0\right] = a_{-1} + b_{-1} \qquad \left[J^-,\, c_0\right] = a_{-1} \\
\left[J^-,\, a_{-1}\right] = \left[J^-,\, b_{-1}\right] = 0
\end{gathered} \tag{4.42}$$

テンソル演算子を構成するには最高ウェイト状態から出発し，

$$A_{+1} = a_{+1} \qquad B_{+1} = b_{+1} \tag{4.43}$$

を定義する．そこで残りの成分を降演算子を適用して作る:

$$A_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0 + c_0) \qquad B_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0 - c_0) \tag{4.44}$$

および

$$A_{-1} = 2a_{-1} + b_{-1} \qquad B_{-1} = a_{-1} + b_{-1} \ . \tag{4.45}$$

昇演算子を作用させれば，単にこの表現の中で上へ戻っていくだけだと確かめることができる．

さてここで一つ残された演算子があり，それはスピン 0 表現でなければならない．**しかしそれはどれか？** それは $J^{\pm}$ との交換子が消えるような線形結合でなければならない —— それゆえ，それは

$$C_0 = a_0 - b_0 - c_0 \tag{4.46}$$

である．

状態を扱う場合とテンソル演算子を扱う場合の違いを示すために，この分析をあからさまに遂行したことを，もう一度強調しておこう．これが代数の下で同様に変換する 7 つの状態の組であったなら，1 重項状態は，二つの 3 重項状態の $J_3 = 0$ 状態と直交する $J_3 = 0$ 状態の線形結合を見つけることによって作ったであろう．ここでは我々はこの支えがなかったけれど，交換関係から直接 1 重項演算子を見つけることができた．もちろん状態の場合にも同じことはできたのだが，状態に対してはスカラー積の良い性質を使う方がふつう容易である．

4.6 演算子の積

テンソル演算子が重要な理由の一つは，スピン s_1 とスピン s_2 表現の二つのテンソル演算子 $O^{s_1}_{m_1}$ と $O^{s_2}_{m_2}$ の積が

$$\begin{aligned}
&\left[J_a,\, O^{s_1}_{m_1}\, O^{s_2}_{m_2}\right] \\
&= \left[J_a,\, O^{s_1}_{m_1}\right] O^{s_2}_{m_2} + O^{s_1}_{m_1} \left[J_a,\, O^{s_2}_{m_2}\right] \\
&= O^{s_1}_{m_1'}\, O^{s_2}_{m_2} [X^{s_1}_a]_{m_1' m_1} + O^{s_1}_{m_1}\, O^{s_2}_{m_2'} [X^{s_2}_a]_{m_2' m_2}
\end{aligned} \tag{4.47}$$

だから，テンソル積表現 $s_1 \otimes s_2$ として変換することである．したがって，積は最高ウェイトの手続きを用いてテンソル演算子に分解できる．

いつものように，ものごとは生成子 J_3 に対して特に簡単である．(4.47) は

$$\left[J_3,\, O^{s_1}_{m_1}\, O^{s_2}_{m_2}\right] = (m_1 + m_2)\, O^{s_1}_{m_1}\, O^{s_2}_{m_2} \tag{4.48}$$

を意味する．二つのテンソル演算子の積の J_3 値は，二つの演算子の J_3 値の単なる和である．

問題

4.A. スピン 1/2 表現として次のように変換する演算子 O_x $(x = 1, 2)$ を考える:

$$[J_a,\, O_x] = O_y\, [\sigma_a]_{yx}/2$$

ただし σ_a はパウリ行列である．

$$\langle 3/2, -1/2, \alpha|\, O_1\, |1, -1, \beta\rangle = A$$

が与えられているとき，次の量を求めよ．

$$\langle 3/2, -3/2, \alpha|\, O_2\, |1, -1, \beta\rangle$$

4.B. 演算子 $(r_{+1})^2$ は

$$\left[L^+,\, (r_{+1})^2\right] = 0$$

を満たす．それ故それはスピン 2 のテンソル演算子の O_{+2} 成分である．その他の成分 O_m を構成せよ．テンソル演算子の積は，演算子の表現のテンソル積のように変換することに注意せよ．この O_m と球面調和関数 $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ との関係は?
ヒント: $r_1 = \sin\theta\cos\phi$，$r_2 = \sin\theta\sin\phi$，$r_3 = \cos\theta$ とせよ．この構成を任意の ℓ に一般化して何が起こっているか説明できるか．

4.C. (3.31) で与えられるスピン 1 表現の J^1_a に対して

$$e^{i\alpha_a J^1_a}$$

を求めよ. **ヒント:** これを簡単にするトリックがある.

$$\alpha_a J_a^1 = \alpha \, \hat{\alpha}_a J_a^1$$

と書け. ただし

$$\alpha = \sqrt{\alpha_a \alpha_a} \,, \qquad \hat{\alpha}_a \hat{\alpha}_a = 1$$

である. (全ての方向は等価であるから) $\hat{\alpha}_a J_a^1$ も J_3^1 と全く同じく 固有値 ± 1 と 0 を持つことがわかる. それゆえ, $(\hat{\alpha}_a J_a^1)^2$ は一つの射影演算子であり, さらに

$$(\hat{\alpha}_a J_a^1)^3 = (\hat{\alpha}_a J_a^1) \; .$$

これらを使えば指数関数の展開をうまく扱って $e^{i\alpha_a J_a^1}$ に対するあらわな表式を得られるだろう.

第5章

アイソスピン

アイソスピンの考えは核物理学において30年代の初期に現れた．ハイゼンベルクは陽子 (proton) と中性子 (neutron) を一つの**核子** (nucleon) 2重項 (doublet) の2成分として扱う記法を導入した．

$$N \equiv \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

彼はもともと核の中の核子間に働く力について考えようとしていたのでこうしたのだが，この記法でものごとを書くことは数学的に便利であった．実際，これに関する彼の最初の考えは完全に間違っていた ——本当に彼は陽子と中性子の間の関係について正しい考えを持っていなかった．彼は中性子を，陽子と電子の堅い束縛状態のようなものと見なし，核子間の力は電子の交換で生じるだろうと想像していた．このようにすれば，陽子と中性子との間の力は，H_2^+ イオンとのアナロジーで，中性子と中性子の間の力は，中性の H_2 分子とのアナロジーで，それぞれ電子を行き来させて得ることができただろう．しかし，陽子と陽子の間には力がない．

5.1　荷電独立性

まもなくそのモデルはまともでないことが認識され，観測された核のパターンを説明するには力は**荷電独立** —— pp 間，pn 間，nn 間で同じ，でなければならなかった．しかし，彼のモデルはまともではなかったが，彼は p と n を一緒にして2重項にし，それらの相互作用を記述するのにパウリ行列を用いた．ちょうど通常のスピンが，スピン 1/2 表現の二つの J_3 成分に働くように，p と n の

2重項に働く保存する“スピン”があれば荷電独立性は自動的であることに色んな人たちがすぐに気づいた．ある人たちはこれを“アイソバリック・スピン”と呼んだ．アイソバー (同重体) は，同じ個数の**バリオン**[1]，すなわち陽子プラス中性子，を持つ核であり，その変換は一つのアイソバーを別のアイソバーへ動かすので，これは合点のいく名前である．不幸にも，Wigner はそれを**アイソトピック・スピン**と呼び，その名前が続いた．アイソトープとは同じ個数の陽子と異なる個数の中性子を持つ核なので，この名前は全く意味をなさない．そのため，最終的には“トピック”は落とされ，今日**アイソスピン**と呼ばれている．

5.2 生成演算子

アイソスピンは，粒子が日常的に作られたり消されたりする素粒子物理学において当におもしろくなる．この力学を記述する自然な言語は生成・消滅演算子に基づいている (そしてこの言語は，後で見るように，核物理学においても大変有用である)．例えば，(5.1) における核子2重項に対し我々は

$$
\begin{aligned}
|p,\alpha\rangle &= a^\dagger_{N,\frac{1}{2},\alpha}|0\rangle \\
|n,\alpha\rangle &= a^\dagger_{N,-\frac{1}{2},\alpha}|0\rangle
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

と書くことができる．ここで

$$
a^\dagger_{N,\pm\frac{1}{2},\alpha} \tag{5.3}
$$

は，それぞれ，状態 α にある陽子 $(+\frac{1}{2})$ と中性子 $(-\frac{1}{2})$ に対する**生成演算子** (creation opeartor) であり，N は核子を表し，すぐ後に他の粒子たちの生成・消滅演算子も議論するのでそれに名前を与えておくことは重要である．生成演算子はエルミートではない．それらの共役は**消滅演算子** (annihilation operator)

$$
a_{N,\pm\frac{1}{2},\alpha} \tag{5.4}
$$

である．これらの演算子は陽子 (あるいは中性子) を，もし存在すれば消し，存在しなければ状態を消す．よって，

$$
a_{N,\pm\frac{1}{2},\alpha}|0\rangle = 0\,. \tag{5.5}
$$

[1] バリオンは，陽子や中性子のような粒子である．もっと一般的には，バリオン数はクォーク数の 1/3 である．後にもっと詳しく議論するように陽子と中性子はそれぞれ三つのクォークからできており，バリオン数 1 を持つ．

この記法全体が，陽子を中性子へと回転する対称性が少なくとも近似的には正しいことを想定している．もし陽子と中性子が何らかの意味で似ていなければ，それらが同じ状態にあると言うことに全く意味がないだろう．p と n はフェルミオンなので，それらの生成・消滅演算子は反交換関係を満たす:

$$\begin{aligned} \{a_{N,m,\alpha}, a^{\dagger}_{N,m',\beta}\} &= \delta_{mm'}\delta_{\alpha\beta} \\ \{a^{\dagger}_{N,m,\alpha}, a^{\dagger}_{N,m',\beta}\} &= \{a_{N,m,\alpha}, a_{N,m',\beta}\} = 0 \ . \end{aligned} \tag{5.6}$$

生成・消滅演算子によって，単に生成演算子を真空状態に 2 回以上適用すれば**多粒子状態**を作ることができる．例えば，

$$\overbrace{a^{\dagger}_{N,\frac{1}{2},\alpha_1} \cdots a^{\dagger}_{N,\frac{1}{2},\alpha_n}}^{n \text{ 個の陽子生成演算子}} |0\rangle \quad \propto \quad |n\text{-陽子};\, \alpha_1, \cdots, \alpha_n\rangle \tag{5.7}$$

は，状態 α_1 から α_n にある n 個の陽子からなる n-陽子状態を作る．反交換関係は，状態が粒子のラベルについて完全反対称であることを意味している．これは，α たちのどれか二つが等しいときに状態が消えることを保証している．このことは，とりわけ，パウリの排他原理が自動的に満たされていることを意味する．生成・消滅演算子に関して素晴らしいことは，陽子と中性子とからなる状態を同じように作れることである．例えば，

$$\begin{aligned} &\overbrace{a^{\dagger}_{N,m_1,\alpha_1} \cdots a^{\dagger}_{N,m_n,\alpha_n}}^{n \text{ 個の核子生成演算子}} |0\rangle \\ &\propto \quad |n\text{-核子};\, m_1, \alpha_1; \cdots; m_n, \alpha_n\rangle \end{aligned} \tag{5.8}$$

は，(陽子か中性子かを区別する) 変数 m と (核子がどの状態にあるかを示す) ラベル α で記述される状態にある核子たち n 個からなる，n-核子状態である．ここでは反交換関係は，ラベルの対 $(m,\ \alpha)$ の交換の下で状態が完全反対称であることを意味している．

$$\begin{aligned} &|n\text{-核子};\, m_1, \alpha_1; m_2, \alpha_2; \cdots; m_n, \alpha_n\rangle \\ &= -|n\text{-核子};\, m_2, \alpha_2; m_1, \alpha_1; \cdots; m_n, \alpha_n\rangle \ . \end{aligned} \tag{5.9}$$

この式をこれまで見たことがない人は，この式に悩まされるかもしれない．二つの陽子は同じ状態には入れないから，陽子の生成演算子たちが反交換すると仮定することは，良いだろう．しかし，陽子と中性子の生成演算子がなぜ反交

換するのか? この原理は "一般化された排他原理と呼ばれる. どうしてそれは正しいのか? これは重要な疑問である. 我々は後でその問題に戻ってくる. 今は, しかし, 生成・消滅演算子がどのように振る舞うのかをいくつかの例で見ておこう.

5.3 個数演算子

陽子と中性子の個数を数える演算子は生成・消滅演算子を一緒に置くことによって作れる (和の約束は仮定している):

$$
\begin{aligned}
a^{\dagger}_{N,+\frac{1}{2},\alpha}\, a_{N,+\frac{1}{2},\alpha} &\ \text{は陽子を数える} \\
a^{\dagger}_{N,-\frac{1}{2},\alpha}\, a_{N,-\frac{1}{2},\alpha} &\ \text{は中性子を数える} \\
a^{\dagger}_{N,m,\alpha}\, a_{N,m,\alpha} &\ \text{は核子を数える}\ .
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

N_p 個の陽子と N_n 個の中性子を持つ任意の状態に作用すれば, これらの演算子は, それぞれ, 固有値 N_p, N_n, $N_p + N_n$ を持つ. これが働くのは, (5.5) 式および, 一般の生成・消滅演算子のペアに対して

$$
\left[a^{\dagger}a,\, a^{\dagger}\right] = a^{\dagger}
\tag{5.11}
$$

となる事実のためである. (5.10) の個数演算子では陽子と中性子の α でラベルされるあらゆる可能な量子状態にわたって和がとられていることに注意したい. もし α にわたって和をとらなければ, 演算子はただ状態 α にある陽子あるいは中性子あるいは両方, のみの個数を数えただけであったろう. あるいは気まぐれを起こして, ある α については足し上げ別のものは足さないようなより制限された個数演算子を定義することもできるだろう. しかしこれ以上そのようなことは論じない. 全ての α について足しあげた全個数演算子が特に役立つであろう.

5.4 アイソスピン生成子

一粒子状態に対しては, 我々はスピン生成子との類推から, アイソスピン対称性の生成子がどのように作用すべきなのかを知っている:

$$
T_a|m,\alpha\rangle = |m',\alpha\rangle\,[J_a^{1/2}]_{m'm} = \frac{1}{2}|m',\alpha\rangle\,[\sigma_a]_{m'm}\,,
\tag{5.12}
$$

もしくは，生成演算子の言葉では，

$$T_a\, a^\dagger_{N,m,\alpha}\,|0\rangle = a^\dagger_{N,m',\alpha}\,|0\rangle\,[J_a^{1/2}]_{m'm} = \frac{1}{2} a^\dagger_{N,m',\alpha}\,|0\rangle\,[\sigma_a]_{m'm}\,. \tag{5.13}$$

さらに，粒子の無い状態は自明な表現のように変換すべきである ——

$$T_a\,|0\rangle = 0\,. \tag{5.14}$$

したがって，生成演算子がアイソスピンのもとで次式のようにスピン 1/2 表現のテンソル演算子として変換すれば，一粒子状態に対する正しい変換則が得られる:

$$\left[T_a,\, a^\dagger_{N,m,\alpha}\right] = a^\dagger_{N,m',\alpha}\,[J_a^{1/2}]_{m'm} = \frac{1}{2} a^\dagger_{N,m',\alpha}\,[\sigma_a]_{m'm}\,. \tag{5.15}$$

容易に確かめられるように，T_a が次の形を持てばこれをうまく再現する:

$$\begin{aligned} T_a &= a^\dagger_{N,m',\alpha}\,[J_a^{1/2}]_{m'm}\,a_{N,m,\alpha} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} a^\dagger_{N,m',\alpha}\,[\sigma_a]_{m'm}\,a_{N,m,\alpha} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} a^\dagger_{N,\alpha}\,\sigma_a\,a_{N,\alpha} + \cdots\,. \end{aligned} \tag{5.16}$$

ただし $\cdots$ は，核子の生成・消滅演算子と可換 (で $|0\rangle$ を消す)．最後の行は行列形で書いており，消滅演算子は列ベクトル，生成演算子は行ベクトルである．(5.16) が生成演算子と正しい交換関係を持ち，(5.15) が満たされることを確かめよう．

$$\begin{aligned} &\left[T_a,\, a^\dagger_{N,m,\alpha}\right] \\ &= \left[a^\dagger_{N,m',\beta}\,[J_a^{1/2}]_{m'm''}\,a_{N,m'',\beta},\; a^\dagger_{N,m,\alpha}\right] \\ &= a^\dagger_{N,m',\beta}\,[J_a^{1/2}]_{m'm''}\,\left\{a_{N,m'',\beta},\, a^\dagger_{N,m,\alpha}\right\} \\ &- \left\{a^\dagger_{N,m',\beta},\, a^\dagger_{N,m,\alpha}\right\}\,[J_a^{1/2}]_{m'm''}\,a_{N,m'',\beta} \\ &= a^\dagger_{N,m',\alpha}\,[J_a^{1/2}]_{m'm}\,. \end{aligned} \tag{5.17}$$

生成子をこのように考えることの利点は，多粒子状態がどう変換するのかが直ちにわかることである．多粒子状態は真空にもっとテンソル (生成) 演算子を作用させて作られるので，多粒子状態はテンソル積のように変換する —— このことは驚くべき結果ではないが，全く自明でもない．

5.5 テンソル積の対称性

ここで一息ついて，(スピンあるいはアイソスピンの) スピン状態の組み合わせについて重要な事実を議論しておこう．我々は次の節で重陽子 (deuteron) を議論するときにそれを用いる．それは次の結果である: 二つの同一のスピン 1/2 表現のテンソル積は二つの既約表現に分解され，スピン 1 表現は対称状態として，スピン 0 表現は反対称状態として現れる．これが意味することを見るために，スピン 1/2 状態が

$$|1/2, \pm 1/2, \alpha\rangle \tag{5.18}$$

だとしよう，ただし，α は何であれ状態を指定するのに必要な他のパラメータである．そのテンソル積で最高ウェイトの状態を考えよう．これは二つの同じ J_3=1/2 状態のスピン 1 の組み合わせであり，よって他のラベルの交換に関して対称である:

$$|1,1\rangle = |1/2,1/2,\alpha\rangle|1/2,1/2,\beta\rangle = |1/2,1/2,\beta\rangle|1/2,1/2,\alpha\rangle\,. \tag{5.19}$$

スピン 1 表現の他の状態を作る降演算子は，二つのスピン 1/2 状態に対して同じように作用するので，この対称性を保つ．

$$\begin{aligned} |1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|1/2,-1/2,\alpha\rangle|1/2,1/2,\beta\rangle \\ &\qquad +|1/2,1/2,\alpha\rangle|1/2,-1/2,\beta\rangle\Big) \\ |1,-1\rangle &= |1/2,-1/2,\alpha\rangle|1/2,-1/2,\beta\rangle\ . \end{aligned} \tag{5.20}$$

それゆえ，それに直交するスピン 0 状態は α と β の交換に関して反対称である:

$$\begin{aligned} |0,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|1/2,-1/2,\alpha\rangle|1/2,1/2,\beta\rangle \\ &\qquad -|1/2,1/2,\alpha\rangle|1/2,-1/2,\beta\rangle\Big)\,. \end{aligned} \tag{5.21}$$

5.6 重陽子

核子はアイソスピン 1/2 と同時にスピン 1/2 も持っているので，核子の生成演算子の中の α は，状態を指定するのに必要な他のパラメータに加えて，実は J_3 ラベルを含んでいる．

多粒子状態の変換の簡単な例として，s-波 (軌道角運動量ゼロ) の二核子状態を考えよう．その場合，全角運動量は単にスピンの角運動量，二核子のスピンの和，である．さらに，s-波状態においては，二核子の位置変数の交換に関して対称である．二粒子波動関数は，真空状態に作用する二つの反可換な生成演算子の積に比例しているので，二核子のアイソスピンとスピンのラベルの同時交換に関して反対称である．—— スピン表現が対称ならアイソスピン表現は反対称でなければならず，逆の場合も同じ．前節の結果と一緒にすると，これは物理的な帰結を持つ．許される状態は，アイソスピン 1 でスピン 0 の状態か，アイソスピン 0 でスピン 1 の状態，のみである．重陽子 (deuteron) はアイソスピン 0 の組み合わせであるが，予想通り，スピン 1 を持っている．

5.7 超選択則

この議論においては，陽子と中性子の生成演算子の反可換性にある種の基本的な物理的意味を付与したように見える．上で言及したように，実際，陽子と中性子は同一粒子ではないのだから，これは疑わしいように思える．パウリの排他原理から直接われわれが実際知ることとは，フェルミ-ディラック統計に従う粒子の任意の状態に対する生成演算子 $a_\alpha^\dagger$ が

$$\left(a_\alpha^\dagger\right)^2 = 0 \tag{5.22}$$

を満たすことである．もし別の状態にある同じ粒子の生成演算子 $a_\beta^\dagger$ があれば，組み合わせ $a_\alpha^\dagger + a_\beta^\dagger$ を作れて，それは真空にかかって，状態 $\alpha + \beta$ (規格化は正しくない) にある粒子を生成する．したがって，排他原理は

$$\left(a_\alpha^\dagger + a_\beta^\dagger\right)^2 = 0 \tag{5.23}$$

も意味するので，

$$\left\{a_\alpha^\dagger, a_\beta^\dagger\right\} = 0 \tag{5.24}$$

である．この議論は形式的には正しい．しかし，もし $a_\alpha^\dagger$ と $a_\beta^\dagger$ が異なる粒子を生成する場合には，あまり物理的意味をなさない．そういう状態の重ね合わせが実際意味がないからである —— この重ね合わせは超選択則によって禁止されている．超選択則というのはおかしな概念である．それは，厳密に保存する

量子数の異なる値を持った状態を重ね合わすことは，それらの状態が直交しているので，決して考える必要がないという言明である．そのような重ね合わせによって導かれたことは，全て，そのような“禁止された”重ね合わせを用いない何らかの他の方法でも導くことができる．よっておわかりのように，重ね合わせは，禁止されているというよりもむしろ無関係である．この場合は，矛盾にぶつからずに生成演算子を反交換するように選べるということを示すこともできるが，もっと強い議論がある．反交換は，生成演算子がテンソル演算子として変換する事実から要求されるのである．この要求が二核子系に対し上述の結果をどのように導くのかを見てみよう．

バリオンの生成演算子を (簡単のため N を落として) $a^\dagger_{\pm\pm}$ と記そう．ここで，初めの符号はアイソスピンの第3成分の符号で，二番目の符号はスピンの第3成分の符号である．$\left(a^\dagger_{++}\right)^2 = 0$ であるから，$T_3 = 1$ で $J_3 = 1$ を持った二核子状態は無い．ところがこのことは，アイソスピン1でスピン1の状態が無いことを意味する．その最高ウェイト状態が $T_3 = 1$ と $J_3 = 1$ を持たねばならないからである．生成演算子の言葉では，例えば，

$$\left[T^-, \left(a^\dagger_{++}\right)^2\right] = \left\{a^\dagger_{-+}, a^\dagger_{++}\right\} = 0 \ . \tag{5.25}$$

同様な議論をすれば，一方の添え字が共通で，他方が異なる二つの生成演算子は反交換しなければならないことを示せる．

共通の添え字を持たない演算子に対する議論はもう少し面倒である．先ず次の量を計算する．

$$\left[J^-, \left[T^-, \left(a^\dagger_{++}\right)^2\right]\right] = \left\{a^\dagger_{--}, a^\dagger_{++}\right\} + \left\{a^\dagger_{-+}, a^\dagger_{+-}\right\} = 0 \tag{5.26}$$

ところが，この和の中の二項は，物理的に区別できるものなので，別々に消えていなければならない．(5.26) のような関係式は，二つの演算子

$$\left\{a^\dagger_{--}, a^\dagger_{++}\right\} |0\rangle \tag{5.27}$$

と

$$\left\{a^\dagger_{-+}, a^\dagger_{+-}\right\} |0\rangle \tag{5.28}$$

とが別々に消えていなければ，成り立ち得ない．もし消えていなければ，それらの二項は物理的に区別できることをしている —— 上向きスピンの陽子と下向

きスピンの中性子の生成は，下向きスピンの陽子と上向きスピンの中性子の生成とは，別物である．よって，演算子 (5.27) と (5.28) は別々に消えなければならない．したがって，アイソスピン 1，スピン 1 の状態 (5.26) が消えるだけではなく，アイソスピン 0，スピン 0 の状態

$$\left\{a^\dagger_{--}, a^\dagger_{++}\right\}|0\rangle - \left\{a^\dagger_{-+}, a^\dagger_{+-}\right\}|0\rangle \tag{5.29}$$

も消えている．

5.8　他の粒子たち

アイソスピンが導入されたときは，それを持つ粒子は陽子と中性子，およびそれらからなる原子核のみであった．しかし素粒子物理学者が探究を進めると，もっとエネルギーの高いところで，核子でできていない新しい粒子が現れた．最初のものは π 粒子で，電荷 $Q=+1$，0，-1，および $T_3=Q$ を持つ，三つのスピン零のボソン (すなわち，フェルミ・ディラック統計ではなくボーズ・アインシュタイン統計に従う) であり，アイソスピン 3 重項 (triplet) をなす[2]．π 粒子の生成・消滅演算子は

$$a^\dagger_{\pi,m,\alpha}\,,\quad a_{\pi,m,\alpha}\qquad (m=-1,0,1) \tag{5.30}$$

と書ける．これらは反交換関係ではなく交換関係を満たす．

$$\begin{gathered}\left[a_{\pi,m,\alpha},\, a^\dagger_{\pi,m',\beta}\right] = \delta_{mm'}\delta_{\alpha\beta}\\ \left[a^\dagger_{\pi,m,\alpha},\, a^\dagger_{\pi,m',\beta}\right] = \left[a_{\pi,m,\alpha},\, a_{\pi,m',\beta}\right] = 0\ .\end{gathered} \tag{5.31}$$

それゆえ粒子状態は完全対称である．それらは核子の生成・消滅演算子とも可換である．

---

[2]これらの粒子が見つかった時は，それが核子と反核子とからできていないということは完全には明らかではなかった．強い相互作用についてほとんど何も知られていなかった時は，例えば，π^+ が陽子と反中性子の束縛状態であると想像することもできた．こう考えても量子数は全て正しく出る ── アイソスピンさえ正しい．結局は単に，この π 粒子の模型は正しくない，ということがわかる．群論はこのようなことについては何も教えてくれない．強い相互作用についての本当の動力学的情報が必要なのである．

アイソスピン生成子は

$$T_a = a^\dagger_{\pi,m,\alpha}\,[J^1_a]_{mm'}\,a_{\pi,m',\alpha} + \cdots \tag{5.32}$$

の形を持つ．ここで $\cdots$ は，(5.16) に於けると同様，(核子のような) 他の粒子からの寄与を表す．ここでもまた，生成演算子はテンソル演算子である．

核子や π 粒子のような，強い相互作用をしアイソスピンを運ぶ粒子は他にもいっぱいある．生成・消滅演算子の定式化は，それら全ての粒子に働くアイソスピン演算子のうまい書き方を与える．アイソスピン演算子の完全な表式は

$$T_a = \sum_{\substack{\text{粒子 } x \\ \text{状態 } \alpha \\ T_3\text{の値 } m,m'}} a^\dagger_{x,m,\alpha}\,[J^{j_x}_a]_{mm'}\,a_{x,m',\alpha}\ . \tag{5.33}$$

ここで $a^\dagger_{x,m,\alpha}$ や $a_{x,m',\alpha}$ は，x-タイプの粒子の生成・消滅演算子であり，それらがボソンかフェルミオンかに応じて交換関係か反交換関係を満たす．

$$\begin{gathered}\left[a_{x,m,\alpha},\ a^\dagger_{x',m',\beta}\right]_\pm = \delta_{mm'}\delta_{\alpha\beta}\delta_{xx'} \\ \left[a^\dagger_{x,m,\alpha},\ a^\dagger_{x',m',\beta}\right]_\pm = \left[a_{x,m,\alpha},\ a_{x',m',\beta}\right]_\pm = 0\ .\end{gathered} \tag{5.34}$$

ここで $\pm$ (反交換子は$+$，交換子は $-$) に対する規則は，x と x' が両方ともフェルミオンの場合には反交換子，それ以外は交換子，を使うということである．(5.33) 式の j_x は，x 粒子のアイソスピンである．

5.9 近似的なアイソスピン対称性

アイソスピンは近似的対称性である．これが一般に意味するところは，ハミルトニアンが

$$H = H_0 + \Delta H \tag{5.35}$$

と書けて，H_0 が対称性の生成子と交換し ΔH が交換しないが，ΔH がある意味で H_0 に比べて小さい，ということである．アイソスピンの場合は，“強い” 相互作用はアイソスピン対称であるが弱い相互作用と電磁相互作用は対称でないので，$H_0 = H_S$，そして $\Delta H = H_{EM} + H_W$ ととる，というのが伝統的である．ただし，H_S，H_{EM}，H_W は，それぞれ，強い相互作用 (運動エネルギー項を含

む)，電磁相互作用，弱い相互作用，を記述するハミルトニアンへの寄与である．我々の現在の観点からすればこの分離は二つの理由からミスリーデングである．先ず，電磁相互作用と弱い相互作用の分離は，その二つの力が部分的に統一されているため，そんなに明らかなことではない．第二に，アイソスピンの破れは一部は u クォークと d クォークの質量差から来ているが，それは実際には運動エネルギー項の一部である．この効果が電磁相互作用の効果と概ね同じ大きさであることは全くの偶然であるように思える．しかし，この偶然は歴史的には重要であった．そのことがアイソスピンが近似的対称性であることの理解を容易にしたからである．素粒子物理学では，それが何かそれ以上のことが進行しているのではないかと思わせる程多くの，そのような偶然があったのである．とにかく，我々はアイソスピンの破れを単純に ΔH にひとまとめにして扱うことにする．群論は，対称性が適正に考慮に入れられている限り，どっちみち動力学を気にしない．

5.10 摂動論

(5.35) の使い道は摂動論にある．状態は，ハミルトニアンのアイソスピン対称部分 H_0 の，ゼロ次の固有状態に分類される．H_0 だけで興味の物理学の十分良い近似になっていることもある．そうでない場合は，ΔH の効果を摂動として扱わねばならない．例えば，強い相互作用をしている粒子の散乱において，弱い相互作用と電磁相互作用はしばしば無視できる．それゆえ，π 粒子-核子散乱において，様々な可能な荷電状態は全てアイソスピン 1/2 か 3/2 ($1 \otimes 1/2 = 3/2 \oplus 1/2$ だから) を持つので，この散乱過程は近似的には二つの振幅だけで記述することができる．

ここでの数学は，軌道角運動量 1 を持ったスピン 1/2 状態を，全角運動量 3/2 と 1/2 の状態に分解する場合のそれと全く同じである．π 粒子一個と核子一個からなる状態は，アイソスピン 1/2 の核子状態とアイソスピン 1 の π 粒子状態とのテンソル積として記述できる．それは，スピンと軌道角運動量の両方を持つ状態が，スピンと軌道角運動量の両方の添え字を持つテンソル積として記述できるのと全く同様である．

問題

5.A.　何らかの過程で，一対のπ粒子が相対軌道角運動量ゼロで作られたとしよう．この状態に対して全アイソスピンはどんな値が可能か?

5.B.　(5.33) で定義される演算子がアイソスピン生成子の交換関係を持つことを示せ．

5.C.　Δ^{++}，Δ^{+}，Δ^{0}，Δ^{-} は，バリオン数1を持つ，(それぞれ，$T_3 = 3/2, 1/2, -1/2, -3/2$ の) アイソスピン 3/2 の粒子である．それらはπ粒子-核子散乱において強い相互作用で作られる．$\pi^+ P \to \Delta^{++}$ で Δ^{++} ができる確率と，$\pi^- P \to \Delta^0$ で Δ^0 ができる確率を比較せよ．

第6章

ルートとウェイト

今からこの $SU(2)$ 代数の表現の解析を任意の単純リー群に一般化しよう．アイデアは単純である．先ず，量子力学においていつもやろうとしていることを行う ——すなわち，可換なエルミートな観測可能量の可能な最大の組を見つけ，それらの固有値を状態をラベルするのに使う．今の場合に観測可能量というのは，互いに可換な，それゆえ同時に対角化できる，エルミート生成子の見つけうる最大の組である．それらの固有値は J_3 の類似物であり，残りの生成子は，$SU(2)$ の昇・降演算子の類似物である．我々は，どの昇演算子もそれぞれ，リー代数のある $SU(2)$ 部分群に対応していることを見いだすだろう．それで，$SU(2)$ について知っていることを用いてより大きな代数について学ぶことができるのである．

6.1 ウェイト

できるだけ多く対角化したいので，互いに可換なエルミート生成子の可能な最大の組が欲しい．

可換なエルミート生成子のできるだけ大きな部分集合は，**Cartan 部分代数**と呼ばれる．Cartan 部分代数は，どれを選んでも同じ結果を得る，という意味で本質的に一意であることがわかる．

ある特定の既約表現 D において，**Cartan 生成子**と呼ばれ次式を満たす，Cartan 部分代数の元に対応するいくつかのエルミート生成子 H_i $(i = 1, \cdots, m)$ が存在する．

$$H_i = H_i^\dagger\,, \qquad [H_i,\, H_j] = 0\,. \tag{6.1}$$

Cartan 生成子は線形空間をなす．よって，次の規格直交性を満たす基底を選ぶことができる．

$$\mathrm{Tr}\,(H_i H_j) = k_D \delta_{ij} \ \ (\, i, j = 1, \cdots, m) \ . \tag{6.2}$$

ここで，k は生成子の規格化と表現とに依存するある定数である．独立な Cartan 生成子の個数 m は，代数の**階数** (rank) と呼ばれる．

もちろん，ポイントは Cartan 生成子が同時に対角化できることである．Cartan 生成子を対角化すれば，表現 D の状態は $|\mu, x, D\rangle$ のように書けて，

$$H_i|\mu, x, D\rangle = \mu_i|\mu, x, D\rangle \tag{6.3}$$

となり，x は状態を特定するために必要な任意の他のラベルである．

固有値 μ_i は**ウェイト** (weights) または**重み**と呼ばれる．それらはエルミート生成子の固有値であるので，実数である．μ_i を成分とする m-成分ベクトルは**ウェイトベクトル**と呼ばれる．以下では次のようなベクトル記法をよく使う．

$$\alpha \cdot \mu \equiv \alpha_i \mu_i \, , \qquad \alpha^2 \equiv \alpha_i \alpha_i \ . \tag{6.4}$$

6.2 さらに随伴表現について

(2.27) で定義した随伴表現は，特に重要である．(2.27) で定義される行列の行と列は，生成子をラベルするのと同じ添え字でラベルされるので，随伴表現の状態は生成子自体に対応している．随伴表現における任意の生成子 X_a に対応する X_a を

$$|X_a\rangle \tag{6.5}$$

と記そう．これらの状態の線形結合は生成子の線形結合に対応する ——

$$\alpha|X_a\rangle + \beta|X_b\rangle = |\alpha X_a + \beta X_b\rangle \, . \tag{6.6}$$

この空間上の便利なスカラー積は次のものである:[1]

$$\langle X_a|X_b\rangle = \lambda^{-1}\,\mathrm{Tr}\left(X_a^\dagger X_b\right) \tag{6.7}$$

---

[1] $SU(2)$ の昇・降演算子に類似の生成子に対しては複素係数の線形結合を考える必要があるので，ここではダガーが必要である．

(λ は，随伴表現に対する k_D である —— (2.37) を見よ)．ここで (6.6) と (2.27) を用いれば，次のように状態への生成子の作用を計算することができる:

$$\begin{aligned} X_a|X_b\rangle = |X_c\rangle\langle X_c|X_a|X_b\rangle = |X_c\rangle\,[T_a]_{cb} = -i\,f_{acb}|X_c\rangle \\ = i\,f_{abc}|X_c\rangle = |i\,f_{abc}X_c\rangle = |[X_a,\,X_b]\rangle\,. \end{aligned} \tag{6.8}$$

6.3 ルート

ルート (roots) とは随伴表現でのウェイトである．$[H_i,\,H_j] = 0$ なので，Cartan 生成子に対応する状態はゼロのウェイトベクトルを持つ．

$$H_i|H_j\rangle = |[H_i,\,H_j]\rangle = 0\ . \tag{6.9}$$

さらに，随伴表現においてゼロのウェイトベクトルを持つ状態はすべて Cartan 生成子に対応する．(6.2) のため，Cartan 状態は正規直交である．

$$\langle H_i|H_j\rangle = \lambda^{-1}\,\mathrm{Tr}\,(H_iH_j) = \delta_{ij}\ . \tag{6.10}$$

Cartan 生成子に対応しない随伴表現の他の状態は，ゼロでないウェイトベクトル α を持つ．その成分 α_i は

$$H_i|E_\alpha\rangle = \alpha_i|E_\alpha\rangle \tag{6.11}$$

であるが，これは対応する生成子が

$$[H_i,\,E_\alpha] = \alpha_iE_\alpha \tag{6.12}$$

を満たすことを意味する．(後で示すように) 随伴表現に対してはゼロでないウェイトは一意的に対応する状態を指定し，(任意の表現 D における (6.3) の x のような) 別のパラメータは必要ない，ということがわかる．$SU(2)$ の昇・降演算子のように，E_α はエルミートではない．それらがエルミートであり得ないことは，実際，(6.12) の共役が

$$\left[H_i,\,E_\alpha^\dagger\right] = -\alpha_iE_\alpha^\dagger \tag{6.13}$$

であるので，

$$E_\alpha^\dagger = E_{-\alpha} \tag{6.14}$$

となることからわかる．これは $SU(2)$ の場合の昇・降演算子 J^+，J^- を想起させるはずである．

異なるウェイトに対応した状態は，少なくとも一つのCartan生成子の異なる固有値を持つので，直交しなければならない．よって随伴表現に於ける状態(すなわち，生成子)の規格化は，

$$\langle E_\alpha | E_\beta \rangle = \lambda^{-1} \operatorname{Tr}\left(E_\alpha^\dagger E_\beta\right) = \delta_{\alpha\beta} \; (= \prod_i \delta_{\alpha_i \beta_i}) \tag{6.15}$$

となるように採れる．ウェイト α_i はルートと呼ばれ，成分 α_i を持つ特別なウェイトベクトル α は**ルートベクトル**である．

6.4　昇・降

―― $E_{\pm\alpha}$ は，状態 $E_{\pm\alpha}|\mu, D\rangle$ がウェイト $\mu \pm \alpha$ を持つので，ウェイトに対する昇・降演算子である ――

$$H_i E_{\pm\alpha}|\mu, D\rangle = [H_i,\, E_{\pm\alpha}]\,|\mu, D\rangle + E_{\pm\alpha} H_i|\mu, D\rangle = (\mu \pm \alpha)_i E_{\pm\alpha}|\mu, D\rangle\,. \tag{6.16}$$

この時点では，我々は未だ正値性の概念を持たないから，どちらが上げて(昇)，どちらが下げる(降)のかを問うことに意味がない．が，この概念は後に導入する．

(6.16)式は任意の表現で正しいが，随伴表現で特に重要である．この訳を理解するため，状態 $E_\alpha|E_{-\alpha}\rangle$ を考えよう．この状態はウェイト $\alpha - \alpha = 0$ を持つので，Cartan生成子に対応した状態の線形結合である．これは，言い換えると，$[E_\alpha,\, E_{-\alpha}]$ がCartan生成子の線形結合だということを意味する:

$$E_\alpha|E_{-\alpha}\rangle = \beta_i\,|H_i\rangle = |\beta_i H_i\rangle = |\beta \cdot H\rangle = |[E_\alpha,\, E_{-\alpha}]\rangle\,. \tag{6.17}$$

ところが，実は β は計算できる ――

$$\begin{aligned}
\beta_i &= \langle H_i | E_\alpha | E_{-\alpha}\rangle \\
&= \lambda^{-1} \operatorname{Tr}\left(H_i\,[E_\alpha,\, E_{-\alpha}]\right) \quad \leftarrow \ \text{(6.8) より} \\
&= \lambda^{-1} \operatorname{Tr}\left(E_{-\alpha}\,[H_i,\, E_\alpha]\right) \quad \leftarrow \ \text{Tr の巡回対称性より}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda^{-1} \alpha_i \ \mathrm{Tr}\,(E_{-\alpha} E_\alpha) && \leftarrow (6.12) \text{ より} \\
&= \alpha_i && \leftarrow (6.15) \text{ より}
\end{aligned} \tag{6.18}
$$

したがって

$$
[E_\alpha,\, E_{-\alpha}] = \alpha \cdot H\,. \tag{6.19}
$$

これは $SU(2)$ の場合の交換関係 $[J^+,\, J^-] = J_3$ を思い出させるに違いない．コンパクトリー群とその表現について学ぶために我々が活用するのはまさにこの類似なのである.

6.5　多くの $SU(2)$ たち

ゼロでないルートベクトルの各対 $\pm\alpha$ に対して，群の一つの $SU(2)$ 部分代数が存在する: その生成子は

$$
\begin{aligned}
E^\pm &\equiv |\alpha|^{-1} E_{\pm\alpha} \\
E_3 &\equiv |\alpha|^{-2} \alpha \cdot H
\end{aligned} \tag{6.20}
$$

で与えられる．これを見るには,

$$
\begin{aligned}
&\left[E_3,\, E^\pm\right] = |\alpha|^{-3}\,[\alpha \cdot H,\, E_{\pm\alpha}] \\
&= |\alpha|^{-3} \alpha \cdot (\pm\alpha) E_{\pm\alpha} = \pm|\alpha|^{-1} E_{\pm\alpha} = \pm E^\pm
\end{aligned} \tag{6.21}
$$

と，(6.19) から出る

$$
\begin{aligned}
&\left[E^+,\, E^-\right] = |\alpha|^{-2}\,[E_\alpha,\, E_{-\alpha}] \\
&= |\alpha|^{-2} \alpha \cdot H = E_3
\end{aligned} \tag{6.22}
$$

に注意すれば良い.

一般的な根拠により，全体の代数の各既約表現の状態は，これらの $SU(2)$ 部分代数の任意の一つに関する既約表現に分解出来ることがわかる．それに我々は既に，$SU(2)$ の既約表現についてはすべてを知っている．このことはルートの性質に非常に強い制限を与える．例えば，ルートベクトルが生成子に一意的に対応していることは，今や簡単に証明できる．そうでは無いと仮定してみると，二つの生成子 E_α と E'_α があることになる．その二つの線形結合を取り直

して，それらが随伴表現の中で互いに直交するようにできる (無用な記号を避けるため，それらは初めから直交していると仮定し，その生成子に対し同じ名前を使う) —— よって

$$\langle E_\alpha | E'_\alpha \rangle = \lambda^{-1} \operatorname{Tr}\left(E_\alpha^\dagger E'_\alpha\right) = \lambda^{-1} \operatorname{Tr}\left(E_{-\alpha} E'_\alpha\right) = 0 \tag{6.23}$$

と書ける．この状態 $|E'_\alpha\rangle$ が $SU(2)$ 部分代数 (6.20) の作用の下でどう振る舞うかを考える．$E^-|E'_\alpha\rangle$ はゼロウェイトベクトルを持つので，それは Cartan 状態の線形結合である．ところが，すべての i に対し

$$\begin{aligned}\langle H_i | E^- | E'_\alpha \rangle &= \lambda^{-1} \operatorname{Tr}\left(H_i \left[E^-, E'_\alpha\right]\right) \\ &= -\lambda^{-1} \operatorname{Tr}\left(E^- \left[H_i, E'_\alpha\right]\right) \\ &= -\alpha_i \lambda^{-1} \operatorname{Tr}\left(E'_\alpha E^-\right) = 0\end{aligned} \tag{6.24}$$

であり，$E^-|E'_\alpha\rangle$ の中のすべての Cartan 状態の係数は消えている．それゆえ，

$$E^-|E'_\alpha\rangle = 0\,. \tag{6.25}$$

しかし一方，

$$E_3|E'_\alpha\rangle = |\alpha|^{-2} \alpha \cdot H |E'_\alpha\rangle\,. = |E'_\alpha\rangle \tag{6.26}$$

も成り立つ．(6.25) は $|E'_\alpha\rangle$ が $SU(2)$ 表現における最低の J_3 状態であることを意味し，他方 (6.26) は，それが $J_3 = 1$ を持つことを意味するので，式 (6.25) と (6.26) は矛盾している．$SU(2)$ 表現における最低の J_3 状態は，正の J_3 を持つことはできない ——最低の J_3 の値は，非負の半整数 j に対し，常に $-j$ である．したがって，E'_α は存在できず，約束したように，$|E_\alpha\rangle$ は α によって一意に特定できることを示せた ——他のラベルは要らない．

実際，もし α がルートなら，α の ($-\alpha$ 以外の) ゼロでない数倍は，ルートではない．これを見るには，三つの状態 $|E_3\rangle$ と $|E^\pm\rangle$ が，代数 (6.20) の随伴表現をなしているので，スピン 1 表現をなす事に注意する．ここで $k\alpha$ が $k \neq \pm 1$ に対してルートであったと仮定しよう．明らかに，対応する状態の E_3 の値は半整数でなければならないから k は半整数でなければならない．しかし，もし k が ± 1 でない整数であるとすると，その状態は，ルート α を持つ別の状態を含む表現の一部であることになるが，それは上で今しがた与えた議論から不可能である．そして，もし k が半奇数ならば，ルート $\alpha/2$ を持つ状態があることになるが，その状態の生成子に付随する $SU(2)$ を使って議論をくり返すことができ，(α は $\alpha/2$ の 2 倍だから) 同じように矛盾することになる．

6.6 注意深く見よ − ここは重要!

もっと一般に，ある表現 D の任意のウェイト μ に対して，E_3 の値は，

$$E_3|\mu, x, D\rangle = \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2}|\mu, x, D\rangle\,. \tag{6.27}$$

E_3 の値は整数または半整数でなければならないから，

$$\frac{2\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} \text{ は整数.} \tag{6.28}$$

一般の状態 $|\mu, x, D\rangle$ は，常に (6.20) で定義される $SU(2)$ の明確な表現として変換する状態の線形結合で書ける．その線形結合に現れる最高スピン状態が j であるとしよう．そうすると，ある非負の整数 p で，

$$\left(E^+\right)^p|\mu, x, D\rangle \neq 0 \tag{6.29}$$

であり，ウェイト $\mu + p\,\alpha$ がその $SU(2)$ のスピン j 表現の最高 E_3 状態である，すなわち

$$\left(E^+\right)^{p+1}|\mu, x, D\rangle = 0 \tag{6.30}$$

となる，ようなものが存在する．状態 (6.29) の E_3 値は

$$\frac{\alpha \cdot (\mu + p\,\alpha)}{\alpha^2} = \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} + p = j \tag{6.31}$$

同様に，次のような非負の整数 q が存在する．

$$\left(E^-\right)^q|\mu, x, D\rangle \neq 0 \tag{6.32}$$

で，ウェイト $\mu - q\,\alpha$ がその $SU(2)$ のスピン j 表現の最低 E_3 状態である，すなわち

$$\left(E^-\right)^{q+1}|\mu, x, D\rangle = 0 \tag{6.33}$$

である．状態 (6.32) の E_3 値は

$$\frac{\alpha \cdot (\mu - q\,\alpha)}{\alpha^2} = \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} - q = -j\,. \tag{6.34}$$

(6.31) と (6.34) を加えれば，

$$\frac{2\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} + p - q = 0 \tag{6.35}$$

あるいは

$$\frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}(p-q) \tag{6.36}$$

を得る．我々は (6.36) を “マスター公式” と呼ぶ．式 (6.31)，(6.34)，(6.36) は，すべてのコンパクトリー群の幾何学的分類に導く基本関係式である．それらは大したものには見えないが，いくらかの幾何学的直感で補強すれば，後に見るように，極めて有効に活用できる．

簡単な最初のステップを以下に示す．(6.36) をルートに適用すると特に強い制限が得られる．それは，異なるルートの任意の対，α と β，に対して，それを二回適用できるからである．E_α で $SU(2)$ 代数を定義すれば，

$$\frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}(p-q) \tag{6.37}$$

を得る．E_β で $SU(2)$ 代数を定義すれば

$$\frac{\beta \cdot \alpha}{\beta^2} = -\frac{1}{2}(p'-q') \tag{6.38}$$

を得る．これらを掛け算すると，ルート α と β の間の角 $\theta_{\alpha\beta}$ に対する注目すべき公式が得られる:

$$\cos^2\theta_{\alpha\beta} = \frac{(\alpha \cdot \beta)^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(p-q)(p'-q')}{4}\,. \tag{6.39}$$

この式で注目すべきことは $(p-q)(p'-q')$ が整数でなければならないことであり，(それは非負であるので) ルートの間の角度に対して (補角を除けば) 興味ある可能性は四つしかない!

$$\begin{array}{cc}
(p-q)(p'-q') & \theta_{\alpha\beta} \\
0 & 90^\circ \\
1 & 60^\circ \text{ or } 120^\circ \\
2 & 45^\circ \text{ or } 135^\circ \\
3 & 30^\circ \text{ or } 150^\circ\,.
\end{array} \tag{6.40}$$

$(p-q)(p'-q') = 4$ の可能性は，0° ないしは 180° に対応し ── どちらも興味がない．0° は我々の一意性に関する定理から既に除外されている．180° は自明である．なぜなら，ルートは常に逆符号のものと対になって，同じ $SU(2)$ 部分群の中に現れるからである．

問題

6.A.　$[E_\alpha,\, E_\beta]$ が $E_{\alpha+\beta}$ に比例しなければならないことを証明せよ．$\alpha+\beta$ がルートでない時は何が起こるのか?

6.B.　あるリー代数の昇・降演算子が，あるゼロでない N に対し

$$[E_\alpha,\, E_\beta] = N\, E_{\alpha+\beta}$$

を満たすとしよう．その時，次式を計算せよ:

$$[E_\alpha,\, E_{-\alpha-\beta}]$$

6.C.　次の 10 個の行列が作る単純リー群を考えよう:

$$\sigma_a \qquad \sigma_a\tau_1 \qquad \sigma_a\tau_3 \qquad \tau_2$$

($a = 1, \cdots, 3$)．ただし σ_a と τ_a は，直交する空間におけるパウリ行列である (問題 3.E を見よ)．Cartan 部分代数として $H_1 = \sigma_3$ と $H_2 = \sigma_3\tau_3$ を採ろう．
(a)　これらの行列によって生成される 4 次元表現のウェイト
と
(b)　随伴表現のウェイト
を求めよ．
ヒント: この章を読んだ後ではこの問題を解くための十分な情報を持っているだろうが，次の章で分析する $SU(3)$ の例を見たあとの方が易しいかもしれない．

第7章

$SU(3)$

$SU(2)$ の次に，素粒子物理学で最も重要な代数は $SU(3)$ である．もしかすると $SU(3)$ の方がより重要かもしれない．確信はない．$SU(3)$ は，行列式が 1 の 3×3 ユニタリー行列のなす群である (再び，(3.30) におけると同じく，U は "ユニタリー (unitary)" を，S は行列式 1 を意味する "特殊 (special)" を，あらわす)．

7.1 Gell-Mann 行列

$SU(3)$ は，エルミートでトレースが 0 の 3×3 行列により生成される．トレース 0 の制限が行列式 1 を与えるものであることを見るのには様々な方法がある．エルミート生成子を指数にのせてユニタリー行列

$$U(\alpha) = e^{i\alpha_a X_a} \tag{7.1}$$

を作れば，任意の基底で行列式を計算できる．特に，$\alpha_a X_a$ を対角化すれば，

$$V\alpha_a X_a V^{-1} = D\,. \tag{7.2}$$

ここで D は対角で，次式を得る:

$$\det(U(\alpha)) = \det(e^{iD}) = \prod_j e^{i[D]_{jj}} = e^{i\,\mathrm{Tr}\,D} = e^{i\,\mathrm{Tr}\,\alpha_a X_a}\ . \tag{7.3}$$

したがって，$\mathrm{Tr}\,\alpha_a X_a = 0$ ならば，行列式は 1 である．

物理学の文献では，エルミートな 3×3 行列に対する標準的な基底は，

Gell-Mann 行列と呼ばれるパウリ行列の一般化で与えられる:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{7.4}$$

Gell-Mann 行列の最初の三つが，部分空間に働くパウリ行列を

$$\lambda_a = \begin{pmatrix} \sigma_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (a = 1, 2, 3) \tag{7.5}$$

の形で含んでいる，という意味で，これらはパウリ行列の一般化である．容易に推測できるように，これらの 3×3 行列を同じように含む 4×4 行列を作れるし，さらにそれを含む $\cdots$，というように続けることができる．

$SU(3)$ 生成子は，慣例的に，

$$T_a = \frac{1}{2}\lambda_a \tag{7.6}$$

と定義され，次の規格直交性を満たす．

$$\mathrm{Tr}\,(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab} \tag{7.7}$$

T_a $(a = 1, 2, 3)$ は，明らかに $SU(3)$ の一つの $SU(2)$ 部分群を生成している．これはアイソスピン部分群とも呼ばれる．それは我々が $SU(3)$ を強い相互作用の近似的対称性として議論する時に明らかになる理由による —— そこでは事実この部分群はハイゼンベルクのアイソスピンである．Cartan 部分代数に T_3 を入れるのが便利である．この T_3 と交換する生成子が一つ，T_8 があるので，それも Cartan 部分代数に入れて，

$$H_1 = T_3 \qquad H_2 = T_8 \tag{7.8}$$

と採る．

7.2 $SU(3)$のウェイトとルート

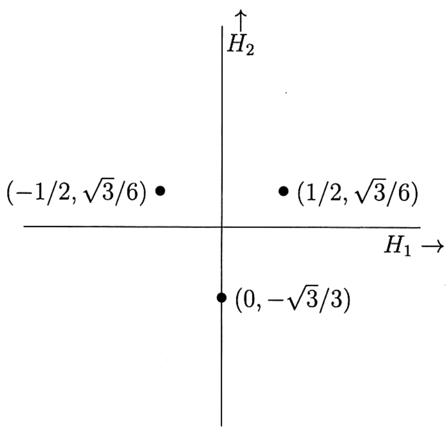
この表現のウェイトは，T_3とT_8が既に対角になっているので，簡単に求まる:

$$T_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T_8 = \frac{\sqrt{3}}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} . \tag{7.9}$$

固有ベクトルと，対応するウェイトは，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\to (1/2, \sqrt{3}/6) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &\to (-1/2, \sqrt{3}/6) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\to (0, -\sqrt{3}/3) . \end{aligned} \tag{7.10}$$

これらのベクトルは，平面上に描くと，正三角形の頂点となっている．



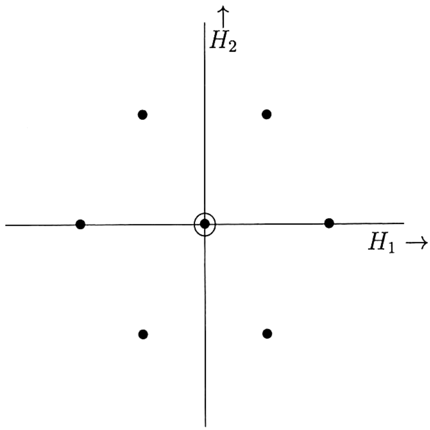
(7.11)

ルートはウェイトの差になるはずである．なぜなら，対応する生成子は，一つのウェイトから別のウェイトへ移すからである．対応する生成子が対角から離

れた一成分だけを持つものであることを理解するのは難しくない:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}}(T_1 \pm iT_2) &= E_{\pm 1,0} \\
\frac{1}{\sqrt{2}}(T_4 \pm iT_5) &= E_{\pm 1/2, \pm\sqrt{3}/2} \\
\frac{1}{\sqrt{2}}(T_6 \pm iT_7) &= E_{\mp 1/2, \pm\sqrt{3}/2} \,.
\end{aligned}
\tag{7.12}
$$

ここに，$\pm$ の複号は同順である．ルートは，ここに示すように，正六角形をなしている．図には中央に Cartan 部分代数の二つの元も描いた:



(7.13)

問題

7.A. $SU(3)$ における f_{147} と f_{458} を計算せよ．

7.B. T_1，T_2，T_3 が $SU(3)$ の一つの $SU(2)$ 部分代数を生成することを示せ．$SU(3)$ の表現は皆，その部分代数の表現でもある．しかし，$SU(3)$ の既約表現は，必ずしも部分代数の既約表現ではない．Gell-Mann 行列で生成される表現はこの部分代数の下でどのように変換するか．すなわち，必要なら，3 次元表現を部分代数の下での既約表現に分解し，どういう既約表現が現れるか答えよ．また $SU(3)$ の随伴表現に対して同じ問いに答えよ．

7.C. λ_2，λ_5，λ_7 が $SU(3)$ の一つの $SU(2)$ 部分代数を生成することを示せ．$SU(3)$ の表現は皆，その部分代数の表現でもある．しかし，$SU(3)$ の既約表現

は，必ずしも部分代数の既約表現ではない．Gell-Mann行列で生成される表現はこの部分代数の下でどのように変換するか．すなわち，必要なら，3次元表現を部分代数の下での既約表現に分解し，どういう既約表現が現れるか答えよ．また$SU(3)$の随伴表現に対して同じ問いに答えよ．

第8章

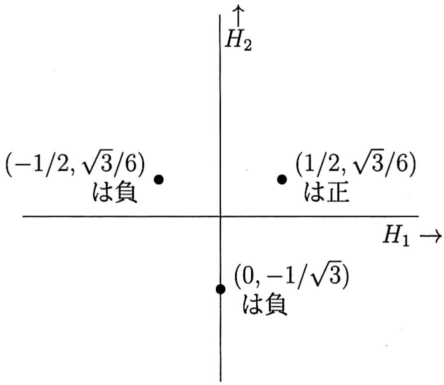
単純ルート

$SU(2)$ と任意の単純リー代数の間のアナロジーを完成するのに必要なことは，ウェイトに対する正値性の概念である．そうすれば，昇・降演算子や "最高ウェイト" などを意味のあるものとして議論できる．我々の欲しいものは，すべてのゼロでないウェイトが正か負かのどちらかであり，また μ が正なら $-\mu$ は負であり，逆もまた然り，ということを保証する定義である．

8.1　正のウェイト

そのような枠組みを見つけるのは容易である —— 実際，多次元空間では無限個存在する．Cartan 部分代数に対する基底を一つ任意に選べば，ウェイトの成分が，μ_1，μ_2，...，と固定される．ウェイトは，その最初のゼロでない成分が正なら**正**，その最初のゼロでない成分が負なら**負**，であるという．この定義は基底の勝手な採り方に依るが，我々の欲しい性質を持っている．最終的には，結果が基底の採り方には依らないことがわかるが，差し当たり，ここでは単にそれを固定し，それを忘れよう．

例えば，$SU(3)$ において，3 次元の定義表現は，そのウェイトをプロットすれば次のようになる:



(8.1)

ウェイト $(0, -1/\sqrt{3})$ が負であるのは，最初の成分がゼロなので符号が二番目の成分の符号で決まるからである．

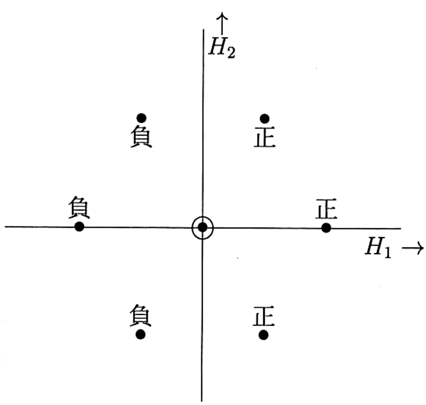
この定義があれば，自明なやり方で順序を定義することができる:

$$\mu > \nu \quad \Longleftrightarrow \quad \mu - \nu \text{が正} . \tag{8.2}$$

これで一つの表現における最高のウェイトについて語ることが可能になる．

随伴表現では，正のルートは昇演算子に，負のルートは降演算子に，それぞれ対応する．任意の表現の最高ウェイトは，それを上げることができない，すなわち，すべての正のルートに対応する生成子がそれに対応する状態を消さねばならない，という性質を持つ．

$SU(3)$ の随伴表現において，我々の通常の基底では，以下に示すように，正のルートは右側に，負のルートは左側に，ある:



(8.3)

8.2　単純ルート

しかし我々は，もし必要がないならすべてのルートを調べ上げるということはしたくない．明らかに正のルートのいくつかは，他の正ルートから構成できる．それで**単純ルート** (simple roots) を，他の正ルートの和として書けない正ルートと定義することは意味をなすだろう．あるウェイトがすべての単純ルートの生成子により消されれば，それが既約表現の最高ウェイトであることを見るだろう．さらに単純ルートの幾何学から代数の全体を再構築することが可能である．この論理はおもしろく，詳細を理解する価値がある．

1 ── α と β が異なる単純ルートならば，$\alpha-\beta$ はルートではない．これが正しいのは，そうでないなら，大きい方のルートを，例えば β とすれば，$\beta-\alpha$ が正ルートであるが，そうすると β が二つの正ルート α と $\beta-\alpha$ の和となってしまうからである．

2 ── $\alpha-\beta$ はルートではないから，

$$E_{-\alpha}|E_\beta\rangle = E_{-\beta}|E_\alpha\rangle = 0\,. \tag{8.4}$$

そうするとマスター公式 (6.36)

$$\frac{\alpha\cdot\beta}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}(p-q)$$

において，整数 q はゼロである．同じく，

$$\frac{\beta\cdot\alpha}{\beta^2} = -\frac{1}{2}(p'-q')$$

において，整数 q' がゼロである．よって

$$\frac{\alpha\cdot\beta}{\alpha^2} = -\frac{p}{2} \qquad \frac{\beta\cdot\alpha}{\beta^2} = -\frac{p'}{2}\,. \tag{8.5}$$

各単純ルートに対して整数 p と p' を知ることは，単純ルートの間の角度と長さの比を知ることと等価である．実際

$$\cos\theta_{\alpha\beta} = -\frac{\sqrt{pp'}}{2} \qquad \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{p}{p'}\,. \tag{8.6}$$

3 ── 任意の二つの単純ルートの間の角度は

$$\frac{\pi}{2} \le \theta < \pi \tag{8.7}$$

を満たす．最初の不等号は，コサインがゼロ以下なので (8.6) から従う．第二の不等号は，すべてのルートが正であることから従う．簡単な多次元の幾何学は，そのとき，単純ルートが線形独立であることを意味する．証明は以下の通り —— 単純ルートの線形結合を考えよう

$$\gamma = \sum_{\alpha} x_{\alpha}\alpha \tag{8.8}$$

係数 x_{α} がみな同じ符号なら，明らかに γ は，α がすべて正ベクトルなので，係数が皆消えていない限り消えることはできない．しかし，各々の符号の係数が存在すれば，

$$\gamma = \mu - \nu \tag{8.9}$$

と書ける．ここで μ と ν は厳密に正のベクトル

$$\mu = \sum_{x_{\alpha}>0} x_{\alpha}\alpha \qquad \nu = -\sum_{x_{\alpha}<0} x_{\alpha}\alpha \tag{8.10}$$

である．ところが γ のノルムは消え得ない．

$$(\mu-\nu)^2 = \mu^2 + \nu^2 - 2(\mu\cdot\nu) \geq \mu^2 + \nu^2 > 0 \tag{8.11}$$

最後の不等式は任意の二つの単純ルートに対し $(\alpha\cdot\beta) \leq 0$ が成立するという事実，(8.6)，から従う．

かくして単純ルートは，どの線形結合も消えることはできないので，線形独立である．

4 —— どの正ルート ϕ も，非負の整数係数 k_{α} を持った単純ルートの線形結合

$$\phi = \sum_{\alpha} k_{\alpha}\alpha \tag{8.12}$$

で書ける．これはちょっとした論理である．もし ϕ が単純ならば，これは正しい．そうでないときは，それを二つの正ルートに分解できるから，それぞれに対し同じことをやれば良い．

5 —— 単純ルートは線形独立であるだけではなく，完全でもある．よって，その個数は代数の階数 m，Cartan 生成子の個数，に等しい．もしこれが正しくなかったと仮定すれば，すべての単純ルートと直交する，それゆえすべてのルートと直交するベクトル ξ があることになる．ところが，そうすると，

$$[\xi\cdot H,\, E_{\phi}] = 0 \quad (\text{すべてのルート } \phi \text{ に対し}) \tag{8.13}$$

となる．$\xi \cdot H$ は，他の Cartan 生成子とも交換するので，すべての生成子と交換することになり，代数が単純でなくなって仮定に反する．

6 —— 最後に，我々は単純ルートから代数全体を再構築することができる．今の時点では，単にすべてのルートをどのように決定するかだけを示そう．後に，これを行うもっと簡単な方法を見つけ，実際の代数を如何に構築するかを議論するだろう．

我々はすべての正ルートが，

$$\phi_k = \sum_\alpha k_\alpha \alpha \tag{8.14}$$

の形を持っているのを知っている．ここで k_α は非負の整数で，整数 k はその和である:

$$k = \sum_\alpha k_\alpha \, . \tag{8.15}$$

もしどの ϕ_k がルートであるのかを言えれば，我々はルートを単純ルートの言葉で決定したことになる．マスター公式を使って，これを帰納的に行うことは，真正直にやれることである．

すべての ϕ_1 たちは，単純ルートそのものだから，ルートである．$k \leq \ell$ に対しては，ルートを決定できたと仮定しよう．そこで，$\phi_{\ell+1}$ の形のルートを与える

$$E_\alpha |\phi_\ell\rangle \tag{8.16}$$

を，あらゆる α に対して考えよう．ここで

$$\frac{2\alpha \cdot \phi_\ell}{\alpha^2} = -(p-q) \tag{8.17}$$

を計算できるが，我々は常に q を知っている．なぜなら，ϕ_ℓ がより小さな k から昇演算子を作用させてどのように作られてきたか，その歴史を知っているからである．したがって，p が決まる．もし $p > 0$ なら $\phi_\ell + \alpha$ はルートである．

この帰納的手続きを $\ell = 1$ に対して例示しよう．この場合，いつも単純ルートからの出発である: $\phi_1 = \beta$ (β は単純ルート)．q はすべてゼロなので，

$$\frac{2\alpha \cdot \phi_1}{\alpha^2} = \frac{2\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} = -p \, . \tag{8.18}$$

よって，$\alpha \cdot \beta = 0$ なら $p = 0$ であり，$\alpha + \beta$ はルートでない．さもなくば $p > 0$ であり，$\alpha + \beta$ はルートである．

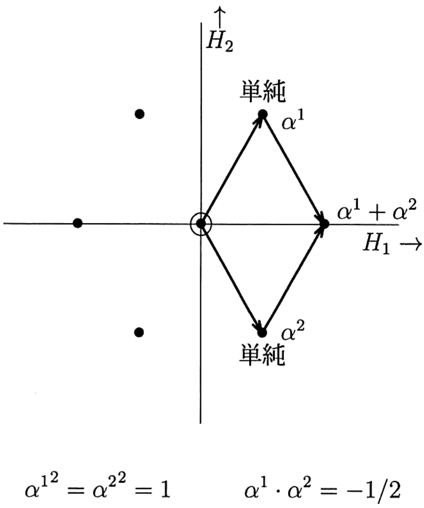
この手続きでルートを見つけられない唯一の可能性は，ある正ルート $\phi_{\ell+1}$ で，ルート ϕ_ℓ とある単純ルートの和では書けないものがあった場合である．しかしそういうことはあり得ない．なぜなら，そういう $\phi_{\ell+1}$ があったとすると，それはすべての $E_{-\alpha}$ で消される $(E_{-\alpha}|\phi_{\ell+1}\rangle$ は，消えていなければ，一つの ϕ_ℓ 状態であり，それに E_α を作用させれば $|\phi_{\ell+1}\rangle$ の状態に戻るから)．したがって，$|\phi_{\ell+1}\rangle$ は，単純ルートに付随するすべての $SU(2)$ 部分代数の最低ウェイト状態のように変換せねばならない．これは，E_3 の値が負，すなわちすべての α に対し $\alpha\cdot\phi_{\ell+1}/\alpha^2 \leq 0$ を要求する．ところが，そのとき

$$\phi_{\ell+1}^2 = \sum_\alpha k_\alpha \alpha\cdot\phi_{\ell+1} \leq 0 \tag{8.19}$$

となるが，これは矛盾である．したがって，我々は常に，すべてのルート $\phi_{\ell+1}$ を，すべての ϕ_ℓ にすべての単純ルートを作用させることにより得ることができる．例えば，$SU(3)$ の場合，正ルート $(1,0)$ は他の二つの正ルート

$$\alpha^1 = (1/2, \sqrt{3}/2) \qquad \alpha^2 = (1/2, -\sqrt{3}/2) \tag{8.20}$$

の和である．この二つ α^1，α^2 は，次図に示すように単純ルートである:



(8.21)

ここで

$$\alpha^{1^2} = \alpha^{2^2} = 1 \qquad \alpha^1\cdot\alpha^2 = -1/2 \tag{8.22}$$

であるから，

$$\frac{2\alpha^1\cdot\alpha^2}{\alpha^{1^2}} = \frac{2\alpha^1\cdot\alpha^2}{\alpha^{2^2}} = -1\ . \tag{8.23}$$

よって，α^1 が $|\alpha^2\rangle$ に作用する場合も，その逆の場合も，ともに $p=1$ である．したがって，$\alpha^1+\alpha^2$ はルートである，が $2\alpha^1+\alpha^2$ や $\alpha^1+2\alpha^2$ はルートでない．

8.3 代数の構築

上で概略を述べた手続きは単にルートをリストアップする以上のものを与える．実際我々は，単純ルートから代数全体を構築することができるのである．マスター公式の導出に戻ろう．我々は (6.31) と (6.34) で

$$\frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} + p = j \qquad \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} - q = -j \tag{8.24}$$

を見いだした．これが導かれたのは，任意の既約表現においてウェイト μ を持つ状態 $|\mu\rangle$ が，α に付随した $SU(2)$ 代数 ((6.20) より)

$$\begin{aligned} E^{\pm} &\equiv |\alpha|^{-1} E_{\pm\alpha} \\ E_3 &\equiv |\alpha|^{-2} \alpha \cdot H \end{aligned} \tag{8.25}$$

の最大のスピン表現として変換する何らかの成分を含まねばならない，からである．この最大のスピンが (8.24) における j である．一般に $|\mu\rangle$ はより低いスピンの成分を持つかもしれないが，j が最高のものである．$(E^+)^p |\mu\rangle$ が，ゼロでなく，もう一つ E^+ を掛ければ消える $|j,j\rangle$ 状態のように変換し，$(E^-)^q |\mu\rangle$ が，もう一つ E^- を掛ければ消える $|j,-j\rangle$ 状態のように変換するよう，j 成分が存在しなければならない．この二つの関係式の足し算がマスター公式を与えた．一方引き算すれば

$$p + q = 2j \tag{8.26}$$

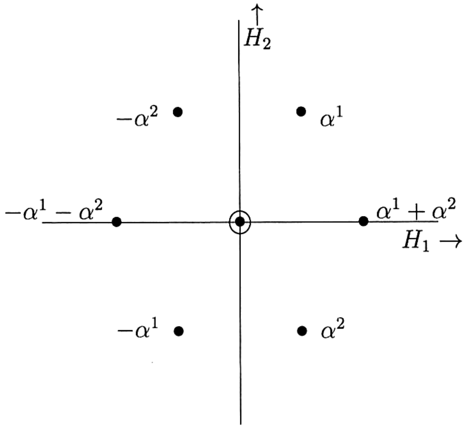
が得られる．よって，p と q がわかれば，そのウェイト状態が含む最高スピン表現がわかる．

μ が随伴表現のルートの場合は，状況はもっと簡単である．随伴表現では各々のルートは一回だけ現れることを我々は示したので，単純ルート α に付随した $SU(2)$ の作用の下でのルート β に対して，p と q，したがって j，がわかれば，$|\beta\rangle$ は，スピン j 表現の $E_3 = \alpha \cdot \beta / \alpha^2$ を持つ状態であると結論できる:

$$|\beta\rangle = |j, \alpha \cdot \beta / \alpha^2\rangle \ . \tag{8.27}$$

位相を除いて完全に決定されるのである．それ故，$E^{\pm}$ がどのように作用するかも，位相を除けば正確にわかる．

$SU(3)$ の例において，これが如何に代数の構築を可能にするのかを見てみよう．ルートの図は次のようである:



(8.28)

ここで

$$\alpha^{1^2} = \alpha^{2^2} = 1 \qquad \alpha^1 \cdot \alpha^2 = -1/2$$
$$\frac{\alpha^1 \cdot \alpha^2}{\alpha^{1^2}} = \frac{\alpha^1 \cdot \alpha^2}{\alpha^{2^2}} = -\frac{1}{2} \ .$$

我々はすでに，α^1 が $|\alpha^2\rangle$ に作用する場合も，その逆の場合も，ともに $p = 1$, $q = 0$ であることを知っている．Cartan 生成子と，他のすべての生成子との交換関係も知っている．それゆえあとは昇・降演算子の交換関係だけが必要である．昇演算子 $E_{\alpha^1+\alpha^2}$ をあらわに構成することから始めよう．$p + q = 1$ であるから $j = 1/2$ であるので，α^1-昇演算子を調べて，

$$\begin{aligned} E^+|E_{\alpha^2}\rangle &= |\alpha^1|^{-1}E_{\alpha^1}|E_{\alpha^2}\rangle \\ &= E_{\alpha^1}|E_{\alpha^2}\rangle = |[E_{\alpha^1},\, E_{\alpha^2}]\rangle \\ &= E_{\alpha^1}|1/2, -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1/2, 1/2\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\eta|E_{\alpha^1+\alpha^2}\rangle \end{aligned} \tag{8.29}$$

となる．ここで η は位相である．これはいくらか説明が必要だろう．$|E_{\alpha^2}\rangle$ 状態は，仮定により，正しく規格化されており，α^1-$SU(2)$ の下での $|1/2, -1/2\rangle$ 状態 (E_3 値が $\alpha^1 \cdot \alpha^2/\alpha^{1^2} = -1/2$) に対応している．それに昇演算子 E^+ を作用させれば，正しく規格化された $|1/2, 1/2\rangle$ 状態が何かがわかる．ところが，これは，

η と呼んだ位相を除いて，正しく規格化された状態 $|E_{\alpha^1+\alpha^2}\rangle$ でなければならない．これらをまとめて，$\eta=1$ の規約を採って，

$$|E_{\alpha^1+\alpha^2}\rangle = \sqrt{2}|[E_{\alpha^1},\, E_{\alpha^2}]\rangle \tag{8.30}$$

を得る．それゆえ

$$E_{\alpha^1+\alpha^2} = \sqrt{2}\,[E_{\alpha^1},\, E_{\alpha^2}] \tag{8.31}$$

今や他の正ルートが単純ルートの交換子として表されたので，我々はヤコビ恒等式を使うだけで任意の交換子を計算できる．例えば，

$$\begin{aligned}
[E_{-\alpha^1},\, E_{\alpha^1+\alpha^2}] &= \sqrt{2}\,[E_{-\alpha^1},\, [E_{\alpha^1},\, E_{\alpha^2}]] \\
&= \sqrt{2}\,[[E_{-\alpha^1},\, E_{\alpha^1}]\,,\, E_{\alpha^2}] \\
&= \sqrt{2}\left[-\alpha^1\cdot H,\, E_{\alpha^2}\right] \\
&= -\sqrt{2}\alpha^1\cdot\alpha^2 E_{\alpha^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}E_{\alpha^2}
\end{aligned} \tag{8.32}$$

我々はこの結果を既に知っている．というのは，これは $SU(2)$ 表現を単に (降演算子で) 下がって戻っただけだからである．以下に示す別の例は，もう少しおもしろい:

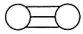
$$\begin{aligned}
[E_{-\alpha^2},\, E_{\alpha^1+\alpha^2}] &= \sqrt{2}\,[E_{-\alpha^2},\, [E_{\alpha^1},\, E_{\alpha^2}]] \\
&= \sqrt{2}\,[E_{\alpha^1},\, [E_{-\alpha^2},\, E_{\alpha^2}]] \\
&= \sqrt{2}\left[E_{\alpha^1},\, -\alpha^2\cdot H\right] \\
&= \sqrt{2}\left[\alpha^2\cdot H,\, E_{\alpha^1}\right] \\
&= \sqrt{2}\alpha^1\cdot\alpha^2 E_{\alpha^1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}E_{\alpha^1}
\end{aligned} \tag{8.33}$$

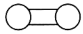
ここでおもしろい点は位相であって，$-$ 符号に決まることである．

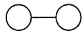
8.4 Dynkin 図形

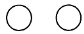
Dynkin 図形は単純ルートを書き下す速記の図形記法である．各単純ルートは白丸で記す．白丸の各対は，それに対応する単純ルートの対の間の角度に応じ

た本数の線で次のようにつなぐ:

 角度が 150° のとき　(8.34)

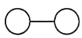
 角度が 135° のとき

 角度が 120° のとき

 角度が 90° のとき

Dynkin 図形は単純ルートの対の間の角度をすべて決定する．これはすべての単純ルートを完全に決めるわけではない．それらの相対的長さに対して二つ以上の選び方があるかもしれないからである．この点については後で戻って来る．

 は，$SU(2)$ の図形

 は，$SU(3)$ の図形　(8.35)

8.5　例: G_2

ある代数が，単純ルート

$$\alpha^1 = (0,1) \qquad \alpha^2 = (\sqrt{3}/2, -3/2) \tag{8.36}$$

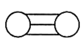
を持つとしよう．これは許される組み合わせである．実際，

$$\begin{gathered} {\alpha^1}^2 = 1 \qquad {\alpha^2}^2 = 3 \\ \alpha^1 \cdot \alpha^2 = -3/2 \\ \frac{2\alpha^1 \cdot \alpha^2}{{\alpha^1}^2} = -3 \qquad \frac{2\alpha^1 \cdot \alpha^2}{{\alpha^2}^2} = -1 \end{gathered} \tag{8.37}$$

だから．この二ルートの間の角度は，

$$\cos\theta_{\alpha^1\alpha^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \theta_{\alpha^1\alpha^2} = 150° \tag{8.38}$$

と決まる．したがって，これは Dynkin 図形



に対応している．この代数は G_2 と呼ばれる．

8.6 G_2 のルート

$|\alpha^2\rangle$ に作用する E_{α^1} に対しては，$p=3$ である．$|\alpha^1\rangle$ に作用する E_{α^2} に対しては，$p=1$ である．よって，

$$\alpha^1+\alpha^2,\quad 2\alpha^1+\alpha^2 \quad \text{および} \quad 3\alpha^1+\alpha^2 \tag{8.39}$$

は，みなルートであるが，

$$\alpha^1+2\alpha^2 \quad \text{および} \quad 4\alpha^1+\alpha^2 \tag{8.40}$$

は，ルートではない．(8.14) の ϕ_k の書き方では，

$$\phi_2=\alpha^1+\alpha^2 \quad \phi_3=2\alpha^1+\alpha^2 \quad \phi_4=3\alpha^1+\alpha^2 \tag{8.41}$$

である．我々は，単純ルートの一般的な性質からこの ϕ_2 状態が一意的であることは知っている．ϕ_3 状態も一意的である: ϕ_2 に作用させて得られる他の唯一の状態，$\alpha^1+2\alpha^2$，がルートでないからである．他の ϕ_4 状態があるかどうかを見るためには，$2\alpha^1+2\alpha^2$ がルートかどうかをチェックしなければならない．すなわち，ϕ_3 に単純ルート，それは α^2 だが，を作用させて得られるかどうか，である．

$$\frac{2\alpha^2\cdot(2\alpha^1+\alpha^2)}{\alpha^{2^2}}=\frac{-6+6}{3}=0=-(p-q) \tag{8.42}$$

ところが，$2\alpha^1$ はルートでないから $q=0$ であり，よって $p=0$．それゆえ $2\alpha^1+2\alpha^2$ はルートではない． 実は，$2\alpha^1+2\alpha^2=2(\alpha^1+\alpha^2)$ がルートの 2 倍だということに注意すれば，この結論にはもっと簡単に到達できた．我々は，(6.26) の後の議論で，ルートの倍数がルートにはなれないことを示したからである．

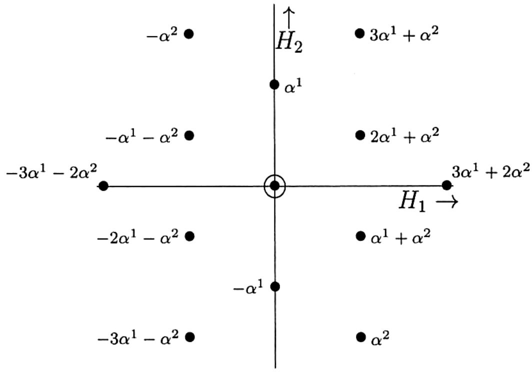
次に ϕ_5 状態を得るためには，$4\alpha^1+\alpha^2$ がルートでないことは既に知っているので，$3\alpha^1+2\alpha^2$ をチェックするだけで良い:

$$\frac{2\alpha^2\cdot(3\alpha^1+\alpha^2)}{\alpha^{2^2}}=\frac{-9+6}{3}=-1=-(p-q) \tag{8.43}$$

再び，$q=0$ なので，$p=1$ で $\phi_5=3\alpha^1+2\alpha^2$ はルートである．$p=1$ であるから，$3\alpha^1+3\alpha^2$ がルートでないこともわかり，よって，ϕ_6 に対しては，$4\alpha^1+2\alpha^2$ だけをチェックすればよい．

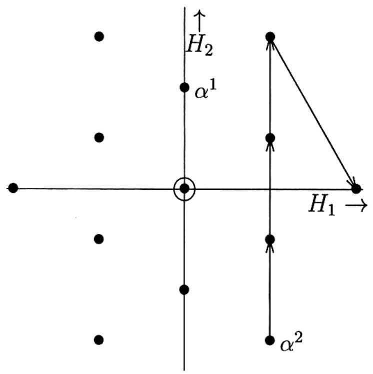
$$\frac{2\alpha^1\cdot(3\alpha^1+2\alpha^2)}{\alpha^{1^2}}=\frac{6-6}{1}=0=-(p-q) \tag{8.44}$$

$2\alpha^1 + 2\alpha^2$ がルートでないので $q = 0$ であり，$p = 0$ で，これで終わりである (ここでも又，$4\alpha^1 + 2\alpha^2$ がルートでないことを示すのに，$2\alpha^1 + \alpha^2$ がルートである事実を使うこともできた)．結局，ルートは次のようになる:



(8.45)

我々のやったことは，次の図形に要約することが出来る:



(8.46)

8.7 Cartan行列

単純ルート α^i が，正ルート ϕ に対応する状態 $|\phi\rangle$ に作用する際に，整数 p^i と q^i がどう変わるのかを追跡する良い方法がある．これを使えば，面倒な幾何学的計算は要らなくなる．アイデアは，ルートを直接その $q^i - p^i$ の値でラベルすることである．任意のウェイト，μ，に対し，その $q^i - p^i$ は，単に E_3 固有値の 2 倍である．ここで，E_3 は単純ルート α^i に付随した $SU(2)$ の Cartan 生成子で

ある．実際，

$$2E_3|\mu\rangle = \frac{2H\cdot\alpha^i}{\alpha^{i2}}|\mu\rangle = \frac{2\mu\cdot\alpha^i}{\alpha^{i2}}|\mu\rangle = \left(q^i - p^i\right)|\mu\rangle . \tag{8.47}$$

α^i は完全で線形独立だから，ウェイトに対する $q^i - p^i$ の値はウェイトベクトルの成分の値と同じ情報を含んでおり，ウェイトをラベルするのに使えるのである．そうすることの利点は，単純ルートによって生成される $SU(2)$ 達の下での表現の構造を大変明白にすることである．正ルート ϕ は，$\phi = \sum_j k_j \alpha^j$ と書けるので，マスター公式は

$$\begin{aligned} q^i - p^i &= \frac{2\phi\cdot\alpha^i}{\alpha^{i2}} \\ &= \sum_j k_j \frac{2\alpha^j\cdot\alpha^i}{\alpha^{i2}} \\ &= \sum_j k_j A_{ji} \end{aligned} \tag{8.48}$$

と書ける．ここで A は **Cartan 行列**

$$A_{ji} \equiv \frac{2\alpha^j\cdot\alpha^i}{\alpha^{i2}} \tag{8.49}$$

である．行列要素 A_{ji} は，状態 $|\alpha^j\rangle$ に単純ルート α^i が作用した時の $q-p$ の値，E_3 値の 2 倍，であるから，全ての成分が整数である．対角成分は皆 2 である．これは定義から明らかであるが，$SU(2)$ の生成子自身はスピン 1 の随伴表現として変換するので，単純ルートは $E_3 = 1$ の値を持つ，という事実からもわかる．非対角成分は，皆 0, −1, −2, −3 のどれかで，単純ルートの間の角度と，長さの比 —— Dynkin 図と同じ情報 ——を記録している．**それらは単純ルートが，他の単純ルートに付随する $SU(2)$ 達のどういう表現に収まっているのかを教えてくれる．** α^j は完全で線形独立だから，Cartan 行列が逆元を持つことは容易にわかる．**Cartan 行列の j 行目は，単純ルート α^j の $q_i - p_i$ 値からなっていることに注意せよ．**

$SU(3)$ の場合は，Cartan 行列は次のようになる．

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{8.50}$$

我々が分析したばかりの G_2 の場合は，次のようになる．

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \tag{8.51}$$

8.8 全てのルートを見つけること

我々はここで，Cartan 行列を使って，単純ルートから全てのルートを見つける手続きが如何に簡単になるかを示そう．昇演算子 E_{α^j} を作用させて ϕ から $\phi+\alpha^j$ へ行く時には， k_j は単に k_j+1 に，q^i-p^i は $q^i-p^i+A_{ji}$ に，変わる．

$$
\begin{aligned}
k_j &\to k_j+1 \\
q^i-p^i &\to q^i-p^i+A_{ji}
\end{aligned}
\tag{8.52}
$$

q^i-p^i を行ベクトルの成分と見なせば，これは単に Cartan 行列の j 番目の行，単純ルート α^j に付随したベクトル $q-p$，を加えることと同じである．これは，ルートを計算する手続きを簡素化してくれる．この手続きを，最初に $SU(3)$ を例にとって説明しよう．$q-p$ 記法における単純ルートから始めよう．各単純ルートを長方形の箱に入れ，ある水平線に沿って並べる．それは正ルートの $k=1$ の層 —— すなわち単純ルート，を表す．

$$
k=1 \qquad \boxed{2\ \ -1} \quad \boxed{-1\ \ 2} \qquad \alpha^1,\, \alpha^2 \tag{8.53}
$$

これの一行下に，Cartan 生成子を表すものとして，m 個のゼロを持つ箱を一つ，$k=0$ 層として置くのが便利である．

$$
\begin{array}{llll}
k=1 & \boxed{2\ \ -1} \quad \boxed{-1\ \ 2} & \alpha^1,\, \alpha^2 \\
k=0 & \qquad\ \ \boxed{0\ \ 0} & H_i
\end{array}
\tag{8.54}
$$

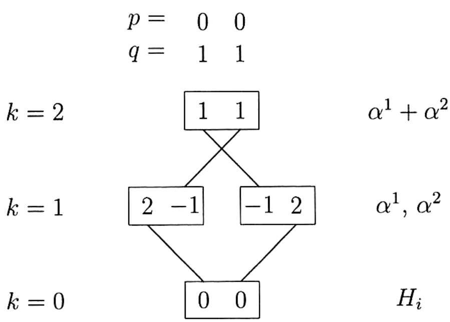
さて，ここで我々は，各箱の各成分に対し q^i の値を知っている．α^i の i 番目の成分に対しては，$q^i=2$ である．何故なら，ルートは $E_{\pm\alpha^i}$ と $\alpha^i\cdot H$ からなる $SU(2)$ のスピン 1 表現の一部だからである．$\alpha^i-\alpha^j$ はルートではないから，他の全ての成分に対して $q^j=0$.

$$
\begin{array}{llll}
 & q=\ 2\ \ \ 0 \qquad\ \ 0\ \ \ 2 & \\
k=1 & \boxed{2\ \ -1} \quad \boxed{-1\ \ 2} & \alpha^1,\, \alpha^2 \\
k=0 & \qquad\ \ \boxed{0\ \ 0} & H_i
\end{array}
\tag{8.55}
$$

よって，対応する p^i も計算できる．

$$
\begin{array}{llll}
 & p = \ 0 \ \ 1 & 1 \ \ 0 & \\
k=1 & \boxed{2 \ -1} & \boxed{-1 \ 2} & \alpha^1, \alpha^2 \\
k=0 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{0 \ \ 0}} & H_i
\end{array}
\tag{8.56}
$$

α^i の i 番目の成分は (A の対角成分だから) 2 なので，対応する p^i はゼロである (これは，$2\alpha^i$ がルートでないので当然)．他の全てに対しては，p はその成分のマイナスである．ゼロでない p の各々に対して，その単純ルートから，$k=1$ の行の一行上に置く $k=2$ の新しいルートへ，線を描く．新しいルートは，適切な単純ルート (すなわち，$p^j \neq 0$ の α^j) を加えて得られるものである．線をその適切な成分 $p^j(\neq 0)$ の真上から出すことにすれば，どの単純ルートが加えられたのかを自動的に追跡することが出来る．同様な線を $k=0$ 層から $k=1$ 層へも描くことが出来るが，各々の単純ルートに対する線は異なる角度を持つ．$k=2$ 層の箱は，各々の単純ルートに付随する線が，$k=0$ 層と $k=1$ 層の間のそれらと同じ角度をなすように，置くようにする．これらの線は，$SU(2)$ の昇降演算子の作用を表している．

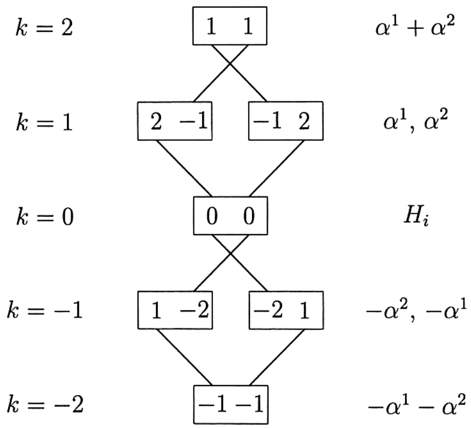


(8.57)

この手続きをくり返すのは容易である．$k=\ell$ から $k=\ell+1$ へ行く際に必要な情報は全て図の中にあるからである．各段階で，対応する q から，ベクトルの成分を引くことによって p を計算する．[1] $SU(3)$ に対しては，$k=2$ の段階で，全ての p がゼロになるので，終わる．

[1](訳者注) ここでは，先ず q の値がわかるとしている．しかし，この点が若干わかりにくいかもしれないので，(8.57) の図の例をとり，$k=2$ 層のルート $(1,1)=\alpha^1+\alpha^2$ に対して，どう

明らかに，この図を下に続けることが出来る．そうすれば，負のルートも同じように示すことが出来，次のようになる．



(8.58)

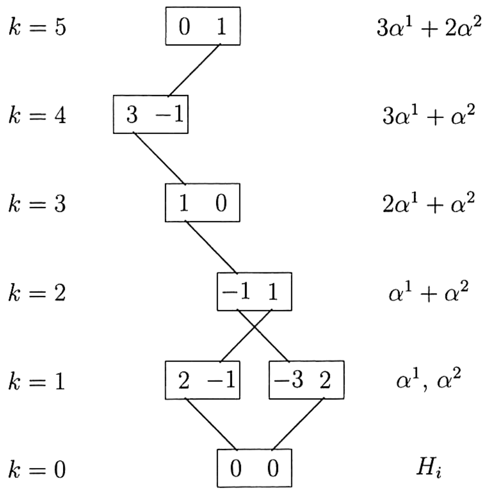
8.9 $SU(2)$ たち

二つの $SU(2)$ の下でのルートの変換則は，(8.58) から明らかであろう．実際，p や q を考える代わりに，各 E_3 の値がどのように $SU(2)$ の表現に収まるかを見るだけでよい．そうすれば，全ての $SU(2)$ 表現が完全になった段階で手続きが終わる．これは，マスター公式がとにかく $SU(2)$ 構造を考えることによって得られたのだから，実際に p や q を計算するのと等価ではあるが，ずっと早くて容易なのである．

して $(q^1, q^2) = (1, 1)$ がわかるかを説明しておこう．最初に，あるルート ϕ に対する q^i というものは，そのルート ϕ から α^i を何回まで引けるか? すなわち，q^i 回引いた $\phi - q^i\alpha^i$ はルートであるが，$q^i + 1$ 回引いた $\phi - (q^i + 1)\alpha^i$ はもはやルートではない，という整数だったことを思い起こそう．(8.57) の図で，ルート $(1, 1)$ から α^1 を引くことは右斜め下へ，α^2 を引くことは左斜め下へ，それぞれ 1 回下がることに対応している．ところが，この図は，すでに $k \leq 2$ の全ての正ルートを与えていることが重要である．この図を見ると，ルート $\phi = (1, 1)$ から，例えば，右斜めに 1 回下がった位置にはルートがあるが，右斜めに 2 回下がった位置にはルートがない，ことがわかる．すなわち $\phi - \alpha^1$ はルートだが，$\phi - 2\alpha^1$ はルートでない，ということで，$q^1 = 1$ が読み取れる．左斜めに下がっても同じ事情だから，$q^2 = 1$ がわかる．

あるいは，逐次的な考え方なら，前の層 $k = \ell$ の全てのルートに関して，既に全ての q^i を知っているので，そこから α^i をさらに何回引けるかはわかっている．よって今の $k = \ell + 1$ 層のルートでも α^i が何回引けるかが読み取れる．

このことを G_2 に対する図で説明しよう:



(8.59)

$SU(2)$ 構造の言葉での議論は次のようになる．我々は，単純ルート $\alpha^1=\boxed{2\ -1}$ と $\alpha^2=\boxed{-3\ 2}$ が，それぞれの $SU(2)$ のスピン 1 表現の最高ウェイトであることを知っている．$\boxed{2\ -1}$ は，-1 のため，α^2 の下で 2 重項の下成分でなければならない．$\boxed{-3\ 2}$ は，-3 のため，α^1 の下でスピン 3/2 の 4 重項の底成分でなければならない．そして，これらを最後まで追いかけていって，各ルートが全ての $SU(2)$ 達の表現にうまく収まるのを確かめるだけで良い．$\boxed{-1\ 1}$ は，α^2 2 重項の上成分であり，α^1 4 重項に入っているので，OK である．$\boxed{1\ 0}$ も，α^2 1 重項であり，α^1 4 重項に入っているので，OK．$\boxed{3\ -1}$ で，α^1 4 重項が終わり，新しい α^2 2 重項が始まる．そして最後に，$\boxed{0\ 1}$ で，その α^2 2 重項が終わるが，それは α^1 1 重項だから，新しいものが始まらず，手続きが終わる．

8.10 G_2 代数の構築

この手続きのもう一つの例は後でやろう．ここでは，G_2 につきあって，その代数を構築する．関連の二つの昇演算子は，

$$E_1^+=E_{\alpha^1}\qquad E_2^+=\frac{1}{\sqrt{3}}E_{\alpha^2} \tag{8.60}$$

である．状態$|E_{\alpha^2}\rangle$から出発しよう．$p=3$で$q=0$であることから，あるいは，(8.59)式のルートを見れば，それがα^1 $SU(2)$のスピン3/2表現の最低ウェイト状態であることがわかる．よって，それを

$$|E_{\alpha^2}\rangle = |3/2, -3/2, 1\rangle \tag{8.61}$$

と呼ぼう．そしてα^1昇演算子を作用させれば

$$\begin{aligned}&|[E_{\alpha^1},\, E_{\alpha^2}]\rangle\\ &= \sqrt{\frac{3}{2}}\,|3/2, -1/2, 1\rangle\\ &= \sqrt{\frac{3}{2}}\,|E_{\alpha^1+\alpha^2}\rangle\end{aligned} \tag{8.62}$$

最後の行は定義である．そこで位相の選択はしたが，昇演算子を使った構成から規格化は正しいことが保証されている．昇演算子をもう一度作用させれば，

$$\begin{aligned}&|[E_{\alpha^1},\, [E_{\alpha^1},\, E_{\alpha^2}]]\rangle\\ &= 2\sqrt{\frac{3}{2}}\,|3/2, 1/2, 1\rangle\\ &= \sqrt{6}\,|E_{2\alpha^1+\alpha^2}\rangle\end{aligned} \tag{8.63}$$

となり，三度作用させると

$$\begin{aligned}&|[E_{\alpha^1},\, [E_{\alpha^1},\, [E_{\alpha^1},\, E_{\alpha^2}]]]\rangle\\ &\quad= \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{6}\,|3/2, 3/2, 1\rangle\\ &\quad= 3\,|E_{3\alpha^1+\alpha^2}\rangle = 3\,|1/2, -1/2, 2\rangle\end{aligned} \tag{8.64}$$

が得られる．ここで，最後の行のように表示したのは，これがα^2 $SU(2)$のスピン1/2表現の最低ウェイト状態だからである．それで，α^2昇演算子を作用させると次式を得る．

$$\begin{aligned}&|[E_{\alpha^2},\, [E_{\alpha^1},\, [E_{\alpha^1},\, [E_{\alpha^1},\, E_{\alpha^2}]]]]\rangle\\ &= 3\sqrt{3}\frac{1}{\sqrt{2}}\,|1/2, 1/2, 2\rangle\\ &= \frac{9}{\sqrt{6}}\,|E_{3\alpha^1+2\alpha^2}\rangle\end{aligned} \tag{8.65}$$

これらを皆まとめると，単純ルートに対応する生成子で全ての正ルートを表現する次式を得る:

$$
\begin{aligned}
E_{\alpha^1+\alpha^2} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\,[E_{\alpha^1},\, E_{\alpha^2}] \\
E_{2\alpha^1+\alpha^2} &= \sqrt{\frac{1}{6}}\,[E_{\alpha^1},\, [E_{\alpha^1},\, E_{\alpha^2}]] \\
E_{3\alpha^1+\alpha^2} &= \frac{1}{3}\,[E_{\alpha^1},\, [E_{\alpha^1},\, [E_{\alpha^1},\, E_{\alpha^2}]]] \\
E_{3\alpha^1+2\alpha^2} &= \frac{\sqrt{6}}{9}\,[E_{\alpha^2},\, [E_{\alpha^1},\, [E_{\alpha^1},\, [E_{\alpha^1},\, E_{\alpha^2}]]]]
\end{aligned}
\tag{8.66}
$$

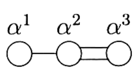
この表式は，Jacobi 恒等式をくり返し使って全ての交換関係を決定するのに十分である．例として α^1 降演算子が我々の期待通りに作用することをチェックしよう．例えば，

$$
\begin{aligned}
&[E_{-\alpha^1},\, E_{\alpha^1+\alpha^2}] \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}}\,[E_{-\alpha^1},\, [E_{\alpha^1},\, E_{\alpha^2}]] \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}}\,[[E_{-\alpha^1},\, E_{\alpha^1}]\,,\, E_{\alpha^2}] \\
&= -\sqrt{\frac{2}{3}}\left[\alpha^1\cdot H,\; E_{\alpha^2}\right] \\
&= -\sqrt{\frac{2}{3}}\,\alpha^1\cdot\alpha^2\,E_{\alpha^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,E_{\alpha^2}
\end{aligned}
\tag{8.67}
$$

これは，降演算子の $|3/2,-1/2\rangle$ 状態への作用として期待する式である．他の関係も同様に見つけることが出来る．一般の形は，負の単純ルート生成子達の，正の単純ルート生成子達の多重交換子との多重交換子を含む．これらを Jacobi 恒等式を用いて並び替えれば，正の生成子と負の生成子はいつも対になってつぶし合い，最後には，正のルートの状態か，負のルートの状態か，Cartan 生成子の状態か，のどれか一つの状態になり，代数は閉じる．

8.11 別の例: C_3 代数

次の Dynkin 図形に対応する代数を調べよう．



(8.68)

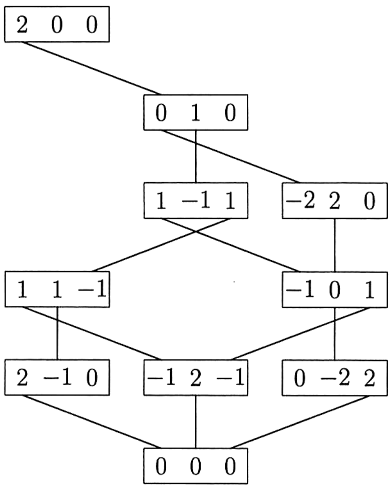
ここで

$$\alpha^{1^2} = \alpha^{2^2} = 1 \qquad \alpha^{3^2} = 2 \tag{8.69}$$

である．Cartan 行列は，

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \tag{8.70}$$

そうすると，正ルートを構成する手続きは次のように進む:[2]



(8.71)

この代数は C_3 と呼ばれる．それは，古典群と呼ばれる，四つの無限系列をなす単純コンパクトリー代数の，一つである．我々は後にそれら全てを議論する．

8.12　基本ウェイト

ある単純リー代数の単純ルートが α^j $(j = 1, \cdots, m)$ だとしよう．ある任意の既約表現 D の最高ウェイト μ は，任意の正ルート ϕ に対して $\mu + \phi$ はウェイトではないという性質を持つ．これは，前の議論より，任意の j に対し $\mu + \alpha^j$ が表現のウェイトでなければ明らかに十分である．何故ならその場合，

$$E_{\alpha^j} |\mu\rangle = 0 \; \forall j \tag{8.72}$$

[2]ここで，群は階数 3 であるから，我々は 3 次元のルートの空間を 2 次元に射影している —— より高い階数の群に対しては，これらの図は全く混み合ったものとなる．

であり，任意の正ルートは単純ルートの多重交換子として表せるので，これは全ての正ルートがこの状態を消すことを意味している．直ぐにわかるように，これは「if and only if」の言明である．というのは，この性質を持つどの状態からも，降演算子を作用させて一つの既約表現の全体が作れるからである．それゆえ，もし (8.72) が成り立つなら，その時は μ はある既約表現の最高ウェイトである．これは，$|\mu\rangle$ に作用する全ての E_{α^j} に対し，$p=0$ であること，したがって，ℓ^j を非負の整数として

$$\frac{2\alpha^j\cdot\mu}{{\alpha^j}^2}=\ell^j \tag{8.73}$$

となることを意味する．α^j 達は線形独立であるから，整数 ℓ^j は，μ を完全に決める．ℓ^j の任意の組は，ある既約表現の最高ウェイトである μ を与える．

かくして，階数 m の単純リー代数の既約表現は m 個の非負の整数 ℓ^j の組でラベルできる．これらの整数は **Dynkin 係数**と呼ばれることがある．

$$\frac{2\alpha^j\cdot\mu^k}{{\alpha^j}^2}=\delta_{jk} \tag{8.74}$$

を満たすウェイトベクトル μ^j を考えることは有用である．どの最高ウェイト μ も，一意的に

$$\mu=\sum_{j=1}^{m}\ell^j\mu^j \tag{8.75}$$

と書ける．それゆえ，最高ウェイト μ を持つ表現は，最高ウェイト μ^1 の表現を ℓ^1 個，最高ウェイト μ^2 の表現を ℓ^2 個，$\cdots$ のテンソル積を構成すれば作れる．この表現は一般に可約であるが，我々はいつも $|\mu\rangle$ に降演算子を作用させて，μ 表現を取り出すことが出来る．

ベクトル μ^j は**基本ウェイト** (fundamental weights) と呼ばれ，これらを最高ウェイトとして持つ m 個の既約表現は**基本表現** (fundamental representations) と呼ばれる．我々はそれらを D^j と記すことがある．上付き添え字は単にラベルであることを覚えておこう．ベクトルはベクトル添え字も持つ．両者共に 1 から m まで走るので，これは潜在的には紛らわしい．

Dynkin 係数に関してもう少し言うべきことがある．基本ウェイト達は完全系をなすので，任意の表現の任意のウェイトは (8.75) におけるように，それらで展開できる．そこで議論を逆にたどれば，我々は (8.73) を得，それは一般の μ に対し，

$$\ell^j=q^j-p^j \tag{8.76}$$

を意味する．すなわち，ℓ^j は，単純ルート α^j に対する $q^j - p^j$ の値である．かくして我々が様々な代数の正ルートを構成する際に操作しているベクトルの行列要素は，ちょうどルートのDynkin係数であった(もちろん，一般のウェイトやルートに対し，Dynkin係数は必ずしも正ではないが)．特に，その構成における最高の箱は，ちょうど随伴表現の最高ウェイトである．Cartan行列の行は単純ルートのDynkin係数である．後に，我々は任意の表現を議論するときに類似の解析を用いる．

8.13　生成子のトレース

ここで，以下の例においてしばしばお目にかかり，かつ「力の統一」の議論において決定的な役割を果たすことになる，一つの定理を証明しておく事は適当であろう:

定理 8.9 コンパクト単純リー群の任意の表現において，任意の生成子のトレースはゼロである．

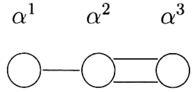
証明: トレースは相似変換のもとで不変だから，6章とこの章で展開してきた標準基底でこれを証明すれば十分である．ウェイトの基底では，生成子は皆，Cartan生成子と昇降演算子の線形結合である．昇降演算子は，対角成分を持たないから，そのトレースはゼロである．また，単純ルート $\vec{\alpha}^i$ 達は完全だからCartan生成子は $\vec{\alpha}^i \cdot \vec{H}$ の線形結合で書ける．ところが，各 $\vec{\alpha}^i \cdot \vec{H}$ は，一つの $SU(2)$ 部分代数の生成子に比例しているので，そのトレースはゼロである．なぜなら，どの $SU(2)$ 表現でも，スピンが $-j$ から j まで走るので，固有値が0に関して対称だからである．よって，Cartan生成子もトレースがゼロであり，定理は証明された．

問題

8.A.　　問題(6.C)で議論した代数に対して，単純ルート，基本ウェイト，Dynkin図，を求めよ．

8.B.　σ_a と η_a を独立な二組のパウリ行列としたとき，σ_a と $\sigma_a\eta_1$ の行列によって生成される代数を考える．この代数が，半単純だが単純でない群を生成する事を示せ．にもかかわらず，単純ルート達は定義できる．その Dynkin 図はどのようになるか?

8.C.　次の Dynkin 図に対応する代数を考えよう．



ここで，

$$\alpha^{1^2} = \alpha^{2^2} = 2 \qquad \alpha^{3^2} = 1$$

これは (8.68) の C_3 に似ているが，ルートの長さ (と相対長さ) が異なる．Cartan 行列を計算せよ．また，この章で説明したダイアグラム構成法を用いて，全ての正ルートの Dynkin 係数を求めよ．正しい場所に線を引くことを忘れないように —— そうすれば混乱しにくくなる．

第9章

さらに$SU(3)$

この章では$SU(3)$の他の表現を調べ，その過程でリー代数の既約表現についてのいくつか有用な一般的ことがらを学ぶ.

9.1 $SU(3)$の基本表現

$SU(3)$の単純ルートを

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= (1/2, \sqrt{3}/2) \\ \alpha^2 &= (1/2, -\sqrt{3}/2) \end{aligned} \tag{9.1}$$

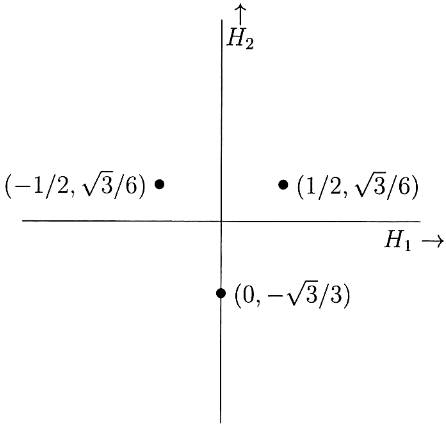
とラベルする．そうすると基本表現の最高ウェイトμ^iは，$i \neq j$の時$\mu^i \cdot \alpha^j = 0$となることを要求すれば，

$$\begin{aligned} &\mu^i = (a^i, b^i) \\ &\mu^i \cdot \alpha^j = (a^i \mp \sqrt{3}\, b^i)/2 \\ &\Rightarrow a^i = \pm\sqrt{3}\, b^i \end{aligned} \tag{9.2}$$

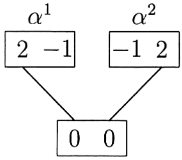
となるので，(8.74)を満たすように規格化して，次のよう決まる.

$$\begin{aligned} \mu^1 &= (1/2, \sqrt{3}/6) \\ \mu^2 &= (1/2, -\sqrt{3}/6) \end{aligned} \tag{9.3}$$

μ^1は，Gell-Mann行列によって生成される定義表現の最高ウェイトである ——

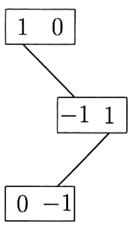


これを $q-p$ 記法で書くこともできる．実際，最高ウェイトから下げてきて全てのウェイトを構成するのに，$q-p$ 記法における降演算子の性質を使うことができる．μ^1 はベクトル (1,0) に対応するので，単純ルートが



(9.4)

のように表される図形記法では，それは次のようになる．

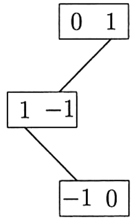


(9.5)

最高ウェイトは，$\alpha^1$2 重項の上状態である．α^1 を引くと，$\boxed{1\ 0} - \boxed{2\ -1} = \boxed{-1\ 1}$ となって，第 2 成分が 1 で，α^2 方向にはその上に状態がないので，それは $\alpha^2$2 重項の上状態である．α^2 を引いて，$\boxed{-1\ 1} - \boxed{-1\ 2} = \boxed{0\ -1}$ となるから，この系列は終わりで，ウェイトは次のようになる:

$$\mu^1 \qquad \mu^1-\alpha^1 \qquad \mu^1-\alpha^1-\alpha^2 \tag{9.6}$$

μ^2，すなわち (0,1) を求めるのにはいくつもやり方がある．それをゼロから構成するもっとも正直な方法は，$q-p$ 記法を使い，最高ウェイトから出発し，$SU(2)$ 表現達を降下していくものである:



(9.7)

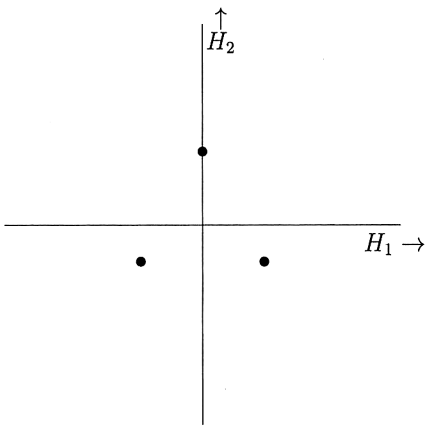
したがって，ウェイトは

$$\mu^2 \qquad \mu^2-\alpha^2 \qquad \mu^2-\alpha^2-\alpha^1 \tag{9.8}$$

すなわち，

$$(1/2,-\sqrt{3}/6) \quad (0,\sqrt{3}/3) \quad (-1/2,-\sqrt{3}/6) \tag{9.9}$$

となり，H_i 平面では次のようになる．



(9.10)

9.2　状態の構成

これらのウェイトは皆一意的な状態に対応していて表現は 3 次元だろうか? (1,0) 表現の場合にはそうだったので，きっとそうだと推測できるし，これら二

つの表現は明らかに綿密に関係している．我々はこの問題に一般的な形で答えられるようにしたいので，一般の表現に対してはどのように答えられるのか考えてみよう．最高ウェイト μ を持つ既約表現があったとしよう．そのとき，一つあるいはそれ以上の状態 $|\mu\rangle$ があり，その表現の中の全ての状態は明らかに

$$E_{\phi_1}E_{\phi_2}\cdots E_{\phi_n}|\mu\rangle \tag{9.11}$$

の形に書ける．ここで ϕ_i は任意のルートである．ところが正の ϕ を持つそのような状態は落とせる．なぜなら，正の ϕ が現れている場合，交換関係を使ってそれを $|\mu\rangle$ に作用するところまで右へ移動させることができるが，それはゼロだからである．したがって，(9.11) 式中の全ての ϕ_i は負にとることができる．

しかし，任意の負のルートは非正の整数係数の単純ルートの線形和で書けたので，一般性を失うことなく，

$$E_{-\alpha^{\beta_1}}E_{-\alpha^{\beta_2}}\cdots E_{-\alpha^{\beta_n}}|\mu\rangle \tag{9.12}$$

の形の状態だけにすることができる．ただし α^{β_i} は単純ルートである．

最高ウェイト状態が一意的であることは，以前にはそうでなかったとしても今や明らかである．もし最高ウェイトを持つ状態が二つあれば，その表現は上の (9.12) の形の独立な二つの状態に分離するので，それは既約でなくなるだろう．

さらに，$|\mu\rangle$ 状態から単純 (ルートの) 降演算子を作用させて得る方法が一通りしかない状態は一意的である．このことは，(0,1) 表現の全ての状態が一意的であることを示している．

最高ウェイトの状態から出発し，降演算子を作用させて他の状態を作っていくこのテクニックは，表現をあらわに作ることを可能にする．我々は状態のノルムや内積を計算でき (問題 9.A を見よ)，昇降演算子の状態への作用は構造的に組み込まれている．これを実際に使って表現行列を作るという事は，通常もっと簡単な方法があるのでやらないが，望めばやれるということである．ポイントは，表現をあからさまに構成するためには，(9.12) のケットで張られる空間の構造を理解していさえすれば良いということである．

先ず注意すべきは，(9.12) 式において異なる $E_{-\alpha^j}$ の組で作られる二つの状態は直交するということである．このことは，α^j 達の線形独立性が，二つの状態が異なるウェイトを持つことを意味していることから明らかである．それらは，エルミートな Cartan 生成子の異なる固有値を持つ固有状態だから，直交する．

任意の状態のノルムは，単純ルートの交換関係を使って容易に計算することが

できる．ノルムは次の形を持つ．

$$\langle\mu|E_{\alpha^{\beta_n}}\cdots E_{\alpha^{\beta_2}}E_{\alpha^{\beta_1}}E_{-\alpha^{\beta_1}}E_{-\alpha^{\beta_2}}\cdots E_{-\alpha^{\beta_n}}|\mu\rangle \tag{9.13}$$

$E_{\alpha^{\beta_1}}$ から始まる昇演算子たちは，順次右側へ,, $|\mu\rangle$ に掛かって消えるところまで移動させることができる．その途中で，ルートが正負の対にならない限り，それらは降演算子と交換する．対になる時は，交換子はCartan生成子の線形結合となり，それは μ と α^{β_j} を用いて評価でき，後には昇，降演算子が一つずつ少ない行列要素が残る．これは面倒ではあるが，それを行う再帰的プログラムが容易に書ける，完全に系統的な手続きである．

もし(9.12)の二つの状態が，同じ β_j の組を持つが順序が違うという場合，それらは同じウェイトを持つ．その場合，我々は空間の構造を理解するために，それらのノルムと内積を計算せねばならない．内積[1]も(9.13)式におけるノルムの計算と同じような構造を持つので，同様に計算できる:

$$\langle\mu|E_{\alpha^{\gamma_n}}\cdots E_{\alpha^{\gamma_2}}E_{\alpha^{\gamma_1}}E_{-\alpha^{\beta_1}}E_{-\alpha^{\beta_2}}\cdots E_{-\alpha^{\beta_n}}|\mu\rangle \tag{9.14}$$

ここに $\{\gamma_j\}$ と $\{\beta_j\}$ は，同じ整数の組だが順序が違っている二つのリストである．ここでも，単に昇演算子たちを右へ移動させることが内積を計算する全く系統的な方法を与える．

一旦ノルムと内積が分かれば，Gram-Schmidtの手続きを使ってヒルベルト空間の正規直交基底を構成することができる．例えば，あるウェイトの空間が(9.12)の形の二つの状態，$|A\rangle$ と $|B\rangle$ を含んでいたとしよう．そのとき，もし

$$\langle A\mid B\rangle\cdot\langle B\mid A\rangle=\langle A\mid A\rangle\cdot\langle B\mid B\rangle \tag{9.15}$$

であるなら，その二つの状態は線形従属であり，基底ベクトルは一つだけあって，それを次のように採ることができる:

$$\frac{|A\rangle}{\sqrt{\langle A\mid A\rangle}}. \tag{9.16}$$

一方，もし

$$\langle A\mid B\rangle\cdot\langle B\mid A\rangle\neq\langle A\mid A\rangle\cdot\langle B\mid B\rangle \tag{9.17}$$

[1]訳注) 原著には行列要素 (matrix element) と書かれているが，二つの状態のinner productを意味しているので，内積と訳した．

ならば，二つの状態は線形独立で，

$$\frac{|A\rangle}{\sqrt{\langle A \mid A\rangle}} \quad と \quad \frac{|B\rangle\langle A \mid A\rangle - |A\rangle\langle A \mid B\rangle}{\sqrt{(\langle A \mid A\rangle)\cdot(\langle A \mid B\rangle\cdot\langle B \mid A\rangle - \langle A \mid A\rangle\cdot\langle B \mid B\rangle)}} \tag{9.18}$$

の形の正規直交基底を採ることができる．

正規直交基底を作りさえすれば空間の構成は完成である．もう一度強調するが，この手続きは面倒で退屈だが，完全に系統的である．それを実行するようコンピューターをプログラムすることもできるだろうし，そうすれば，最高ウェイトと単純ルートから任意の表現を完全に構成することができるということだ．

9.3 Weyl 群

μ^2 表現における状態が縮退していないことは，その表現の明らかな対称性からも示すことができたのである．その対称性というのは，各ルートの方向に付随して $SU(2)$ があり，全ての $SU(2)$ 表現が鏡映 $E_3 \to -E_3$ の下で対称である，ということから出てくる．特に，μ がウェイトで，$E_3 = \alpha\cdot H/\alpha^2$ がルート α に付随した E_3 とした場合，

$$E_3|\mu\rangle = \frac{\alpha\cdot\mu}{\alpha^2}|\mu\rangle \tag{9.19}$$

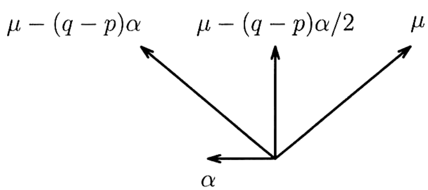
とその鏡映対称性は，($(q-p) = 2(\alpha\cdot\mu/\alpha^2)$ として) $\mu-(q-p)\alpha$ が反対符号の E_3 の値

$$E_3|\mu-(q-p)\alpha\rangle = -\frac{\alpha\cdot\mu}{\alpha^2}|\mu-(q-p)\alpha\rangle \tag{9.20}$$

を持つウェイトであることを意味する．μ とその鏡映 $\mu-(q-p)\alpha$ のベクトル平均は $\mu-(q-p)\alpha/2$ であり，それが α に直交する超平面に乗っている事に注意しよう．なぜなら，

$$\alpha\cdot(\mu-(q-p)\alpha/2) = \alpha\cdot\mu-(q-p)\alpha^2/2 = 0 \tag{9.21}$$

だからである．位置関係を図示すれば次のようになる:

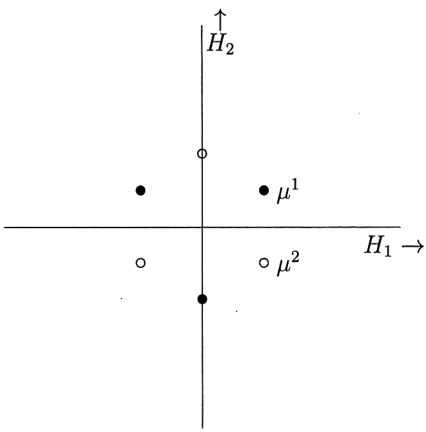


(9.22)

全てのルートに対するこのような鏡映は，ルートを変えないウェイト空間上の変換をなす．二つあるいはそれ以上のこれらの鏡映を組み合わせてルートを変えない変換をもっと得る事ができる[2]．このようにして得られる変換全ての集合は代数の **Weyl 群**と呼ばれる変換群をなす．個々の鏡映は Weyl 鏡映と呼ばれる．Weyl 群は $SU(3)$ 表現に現れた六角形や三角形の構造を理解する簡単な方法である．

9.4 複素共役

二番目の基本表現のウェイトは一番目の基本表現のウェイトのちょうどマイナスになっていることに注意しよう．



(9.23)

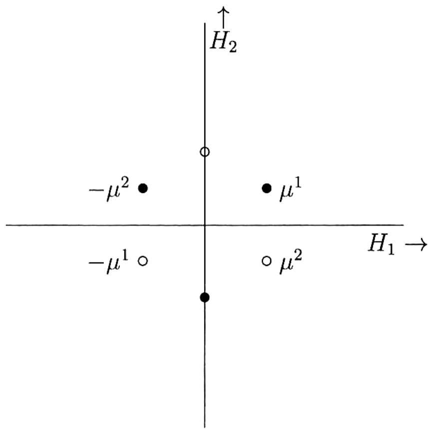
このことは，この二つの表現が複素共役の関係にあることを意味する．T_a をあるリー代数のある表現 D での生成子としたとき，行列 $-T_a^*$ は，(構造定数が実であるから) T_a と同じ交換関係を満たしている ——

$$
\begin{aligned}
([T_a, T_b])^* &= (i f_{abc} T_c)^* \\
\left[T_a^*, T_b^*\right] &= -i f_{abc} T_c^* \\
\left[-T_a^*, -T_b^*\right] &= i f_{abc} (-T_c^*)
\end{aligned}
\tag{9.24}
$$

[2]例えば，$SU(3)$ で，先ず α^1 に直交する平面で鏡映し，次に α^2 に直交する平面でやれば，結果は 120° の回転になる．

これは**表現 D の複素共役**と呼ばれるもので，時に $\overline{D}$ と表記される．D は，もしその複素共役と同値な場合，**実表現**と言う．同値でない場合は，**複素表現**である．複素共役表現の Cartan 生成子は $-H_i^*$ である．H_i はエルミートだから，H_i^* は H_i と同じ固有値を持つ．よって，μ が D のウェイトならば，$-\mu$ が $\overline{D}$ のウェイトである．特に，$\overline{D}$ の最高ウェイトは D の最低ウェイトのマイナスである．

明らかに，$SU(3)$ において，表現 (0,1) は (1,0) の複素共役である．(1,0) の最低ウェイトは $-\mu^2$ で，(0,1) の最高ウェイトのマイナスである．逆もまた同様である．



(9.25)

物理の文献では $SU(3)$ 表現に対して色んな異なる記法が使われている．ある時は Dynkin 係数 (q_1, q_2) が使われる．これは常に一意的なラベル付けである．ところが，通例の簡略記法は，小さな表現に対してはそう紛らわしくはないが，その表現の次元を与えるもので，その複素共役表現にはバーをつけて元の表現と区別する．例えば，

$$(1,0) \equiv 3 \qquad (0,1) \equiv \overline{3} \tag{9.26}$$

一般に (n,m) の複素共役は (m,n) である．これは最高ウェイトと最低ウェイトを考えれば明らかであろう．$(1,0)$ の最低ウェイトは $(0,1)$ の最高ウェイトのマイナスであり，逆もまた然りだから，

$$\begin{array}{llll} (n,m) & \text{は，最高ウェイト} & n\mu^1 + m\mu^2 & \text{を持つ} \\ (n,m) & \text{は，最低ウェイト} & -n\mu^2 - m\mu^1 & \text{を持つ} \\ & \Rightarrow & & \\ (m,n) & \text{は，最高ウェイト} & n\mu^2 + m\mu^1 & \text{を持つ} \end{array} \tag{9.27}$$

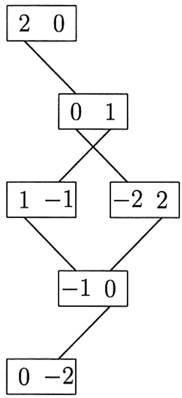
となる．(n,n) の形の表現は実である．

9.5　他の表現の例

表現 (2,0) を考えよう．その最高ウェイトは

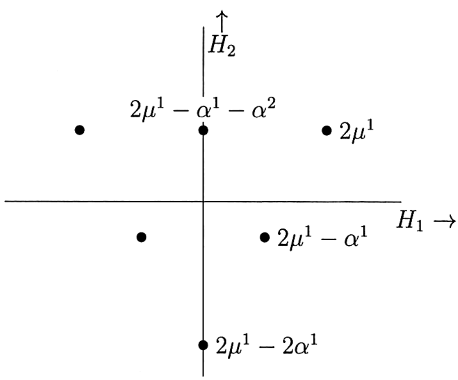
$$2\mu^1 = (1, 1/\sqrt{3}) \tag{9.28}$$

である．(9.4) や (9.5) のような $q-p$ 記法では，(ウェイトは) 次のようになる:



(9.29)

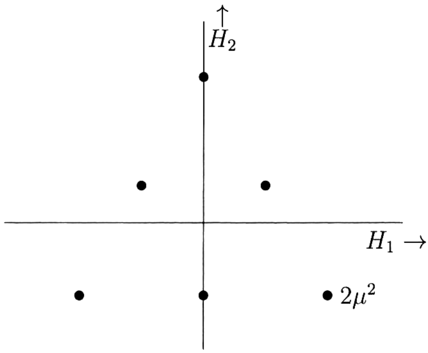
または，Cartan 空間では，



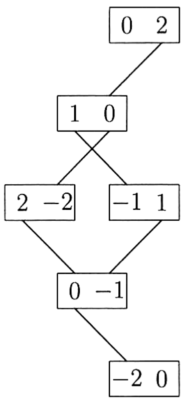
(9.30)

全てのウェイトが一意的な状態に対応している．$2\mu^1-\alpha^1$，$2\mu^1-2\alpha^1$，$2\mu^1-\alpha^1-\alpha^2$ は，最高ウェイトから一意的な径路で到達できる．他のウェイトは Weyl

鏡映でつながる．よって，これは6次元表現である —— $(2,0) \equiv 6$. 明らかにそれは複素表現である．その複素共役 $(0,2) \equiv \overline{6}$ は，Cartan 平面では原点に関して反転して，$q-p$ 図では鉛直線に関して鏡映して，得られる:



(9.31)



(9.32)

次に表現 (1,1) を考えよう．

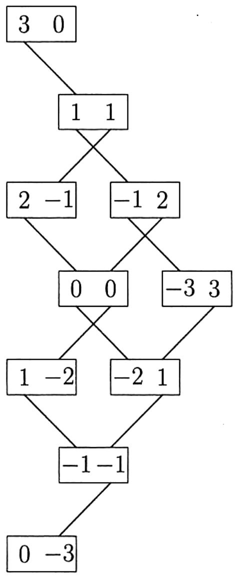
$$\mu^1 + \mu^2 = \alpha^1 + \alpha^2 \tag{9.33}$$

であるが，$\alpha^1 + \alpha^2$ が随伴表現 (8.58) の最高ウェイトであることに注意する．我々は，ゼロウェイトが2重に縮退 (Cartan 部分代数の二つの状態に対応) していることを知っている．最高ウェイトからゼロを得る方法が二通りあれば，異なる状態を与える．実際

$$E_{-\alpha^1} E_{-\alpha^2} |\mu^1 + \mu^2\rangle \not\propto E_{-\alpha^2} E_{-\alpha^1} |\mu^1 + \mu^2\rangle \tag{9.34}$$

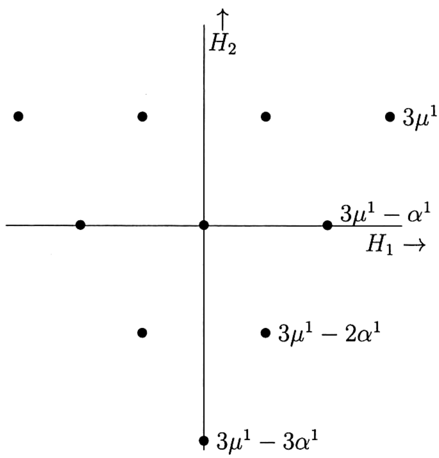
を示すことができる．問題 (9.A) でこれを行う．

次に (3,0) を見よう．最高ウェイトは $3\mu^1$ である．



(9.35)

ウェイト図は



(9.36)

中心以外の全ての状態は明らかに一意的である．ところが中心のそれも一意

的である事が分かる．二つのベクトル

$$
\begin{aligned}
&E_{-\alpha^1}E_{-\alpha^2}E_{-\alpha^1}|3\mu^1\rangle \\
&E_{-\alpha^2}E_{-\alpha^1}E_{-\alpha^1}|3\mu^1\rangle
\end{aligned}
\tag{9.37}
$$

は，線形従属である．なぜなら，

$$
\begin{aligned}
&E_{-\alpha^2}E_{-\alpha^1}E_{-\alpha^1}|3\mu^1\rangle \\
&\quad = [E_{-\alpha^2},\, E_{-\alpha^1}]\, E_{-\alpha^1}|3\mu^1\rangle \\
&\qquad + E_{-\alpha^1}E_{-\alpha^2}E_{-\alpha^1}|3\mu^1\rangle \\
&\quad = E_{-\alpha^1}\, [E_{-\alpha^2},\, E_{-\alpha^1}]\, |3\mu^1\rangle \\
&\qquad + E_{-\alpha^1}E_{-\alpha^2}E_{-\alpha^1}|3\mu^1\rangle \\
&\quad = E_{-\alpha^1}E_{-\alpha^2}E_{-\alpha^1}|3\mu^1\rangle \\
&\qquad + E_{-\alpha^1}E_{-\alpha^2}E_{-\alpha^1}|3\mu^1\rangle \\
&\quad = 2E_{-\alpha^1}E_{-\alpha^2}E_{-\alpha^1}|3\mu^1\rangle
\end{aligned}
\tag{9.38}
$$

と書けるからだ． ここで第二等号は，$-2\alpha^1 - \alpha^2$ がルートでないので

$$
[[E_{-\alpha^2},\, E_{-\alpha^1}]\,,\, E_{-\alpha^1}] = 0 \tag{9.39}
$$

となることから従い，第三等号は，$3\mu^1 - \alpha^2$ がルートでないため

$$
[E_{-\alpha^2},\, E_{-\alpha^1}]\, |3\mu^1\rangle = E_{-\alpha^2}E_{-\alpha^1}|3\mu^1\rangle \tag{9.40}
$$

が成り立つからである．

よって，これは 10 次元表現である．単に 10 とも呼ばれる．その複素共役表現 $(0, 3)$ は $\overline{10}$ である．

問題

9.A.　　$|\mu\rangle$ を $SU(3)$ の随伴表現の最高ウェイト $(\mu = \mu^1 + \mu^2)$ の状態としたとき，状態

$$
|A\rangle = E_{-\alpha^1}\, E_{-\alpha^2}\, |\mu\rangle
$$

と

$$|B\rangle = E_{-\alpha^2}\,E_{-\alpha^1}\,|\mu\rangle$$

が線形独立であることを示せ．ヒント: 行列要素 $\langle A \mid A\rangle$，$\langle A \mid B\rangle$，$\langle B \mid B\rangle$ を計算せよ．$|A\rangle$ と $|B\rangle$ は

$$\langle A \mid A\rangle\langle B \mid B\rangle = \langle A \mid B\rangle\langle B \mid A\rangle$$

が成り立つ場合に限り，線形独立であることを示せ．

9.B.　$SU(3)$ の λ_a 行列と Pauli 行列 σ_a の 6 次元のテンソル積空間で定義される次の行列を考えよう:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\lambda_a\sigma_2 \qquad a = 1,3,4,6,8 \\ &\frac{1}{2}\lambda_a \qquad a = 2,5,7\ . \end{aligned}$$

これらは可約表現をなすことを示し，既約成分に分解せよ．

9.C.　3×3 のテンソル積を，最高ウェイトの方法を用いて既約分解せよ．

第 10 章

テンソル法

テンソルは $SU(3)$ においても，その他多くの群においても，具体的計算をするための大変有用な道具である．直ぐにわかるように，テンソルの考え方は量子力学の波動関数の考え方と同じである．

10.1 上付き，下付き添字

3 表現の状態を次のようにラベルすることから始める:

$$
\begin{aligned}
|1/2, \sqrt{3}/6\rangle &\equiv |_1\rangle \\
|-1/2, \sqrt{3}/6\rangle &\equiv |_2\rangle \\
|0, -1/\sqrt{3}\rangle &\equiv |_3\rangle
\end{aligned}
\tag{10.1}
$$

このラベル 1，2，3 は，これらのウェイトに対応した H_1，H_2 行列の固有状態が，それぞれ，第 1，第 2，第 3 成分のみゼロでない要素を持つベクトルである，という事実を想起させるためのものである．直ぐ後で明らかになる理由により，添字を行の下方に書いたことにも注意したい．

上付き添字と下付き添字を一つずつ持つ一組の行列として，

$$
[T_a]^i_j = \frac{1}{2}[\lambda_a]_{ij} \tag{10.2}
$$

を定義すれば，3 重項の状態 $|_i\rangle$ は代数の下で次のように変換する:

$$
T_a|_i\rangle = |_j\rangle[T_a]^j_i \tag{10.3}
$$

注意すべき重要な点は，j に関する和が，一つの上付き添字と一つの下付き添字を含むことである．

$\overline{3}$ 表現の状態を次のようにラベルしよう:

$$
\begin{aligned}
|-1/2,-\sqrt{3}/6\rangle &\equiv |^1\rangle \\
|1/2,-\sqrt{3}/6\rangle &\equiv |^2\rangle \\
|0,1/\sqrt{3}\rangle &\equiv |^3\rangle
\end{aligned}
\tag{10.4}
$$

そうすれば,

$$T_a|^i\rangle = -|^j\rangle[T_a]^i_j \tag{10.5}$$

である. この変換性が正しいことは, $\overline{3}$ が

$$-[T^*_a]^j_i = -[T^T_a]^j_i = -[T_a]^i_j \tag{10.6}$$

により生成される複素共役表現であることからわかる.

ここで, いつものように, n 個の 3 表現と, m 個の $\overline{3}$ 表現のテンソル積の状態を定義することが出来る:

$$|^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_n}\rangle = |^{i_1}\rangle\cdots|^{i_m}\rangle|_{j_1}\rangle\cdots|_{j_n}\rangle \tag{10.7}$$

これは次のように変換する.

$$T_a|^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_n}\rangle = \sum_{\ell=1}^{n}|^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_{\ell-1}\,k\,j_{\ell+1}\cdots j_n}\rangle\,[T_a]^k_{j_\ell} - \sum_{\ell=1}^{m}|^{i_1\cdots i_{\ell-1}\,k\,i_{\ell+1}\cdots i_m}_{j_1\cdots j_n}\rangle\,[T_a]^{i_\ell}_k \tag{10.8}$$

上付き添字と下付添字のこの区別は, $SU(3)$ が二つの異なる 3 次元表現 —— 3 表現と $\overline{3}$ 表現, を持つため, 有用である. 我々はそれらを区別する何らかの方法が必要であり, 添字の上げ下げはちょうど手頃な記法上の工夫である.

10.2 テンソル成分と波動関数

ここで, このテンソル積空間における勝手な状態を考えよう:

$$|v\rangle = |^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_n}\rangle\,v^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_m} \tag{10.9}$$

v は, **テンソル**と呼ばれる. テンソルとはまさに "波動関数" である. 何故なら, v は $|v\rangle$ のテンソル積状態との内積で与えられるからである:

$$v^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_m} = \langle^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_n}|v\rangle \tag{10.10}$$

ここにおける対応は, 量子力学における粒子の空間波動関数と, ヒルベルト空間における粒子を記述する状態との間の関係と正確に同じものである.

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle \tag{10.11}$$

テンソル v は，その**テンソル成分** $v^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_m}$ で特徴付けられる．そこで，生成子の $|v\rangle$ に対する作用は，次のようにテンソル成分に対する作用として考えることが出来る:

$$T_a|v\rangle = |T_a v\rangle \tag{10.12}$$

ここで

$$T_a v^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_m} = \sum_{\ell=1}^{n} [T_a]^{j_\ell}_k \, v^{j_1\cdots k\cdots j_n}_{i_1\cdots i_m} - \sum_{\ell=1}^{m} [T_a]^k_{i_\ell} \, v^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots k\cdots i_m} \tag{10.13}$$

この式は，任意のテンソルに対する生成子の作用を定義するものである!

10.3 既約表現と対称性

我々は，今や最高ウェイトの手続きを用いて，既約表現 (n,m) に対応したテンソル積の中の状態を抜き出すことが出来る．$|_1\rangle$ が (1,0) 表現の最高ウェイトであり，$|^2\rangle$ が (0,1) 表現の最高ウェイトであるから，(n,m) における最高ウェイトを持つ状態は

$$|^{222\cdots}_{111\cdots}\rangle \tag{10.14}$$

これは次の成分を持つテンソル v_H に対応している:

$$v_H{}^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_m} = N\,\delta_{j_1 1}\cdots\delta_{j_n 1}\,\delta_{i_1 2}\cdots\delta_{i_m 2} \tag{10.15}$$

(n,m) 表現における全ての状態はテンソル v_H に降演算子を作用させることによって得られる．重要な点は，変換 $v_H \to T_a v_H$ において保たれる二つの性質を v_H が持つということである．

1. v_H は，上付き添字に関して対称で，下付き添字についても対称である．

2. v_H は次式を満たす:

$$\delta^{i_1}_{j_1}\, v_H{}^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_m} = 0 \tag{10.16}$$

第一の性質は，生成子が，全ての上付き添字達に同じように作用し，全ての下付添字達に同じように作用するため，保たれる．第二の性質は，(10.13) 式のマイナス符号と T_a 達のトレースがゼロであることから，保たれる．(n,m) における全てのテンソルは，それゆえ，この形の，上付き・下付き両添字に関し対称でト

レースがゼロ (すなわち，行列のトレースゼロの条件の一般化である (10.16) 式を満たす) という性質を持つテンソルに対応する．この対応は逆もまた成立することがわかる．任意のそのようなテンソルは (n, m) の状態を与える．

10.4 不変テンソル

$\delta^{i_1}_{j_1}$ は**不変テンソル**と呼ばれる． 不変テンソルとは，$SU(3)$ 変換の下で変化しないテンソルである．テンソルの変化分は，それに作用する生成子のある線形結合に比例するが，

$$[T_a\delta]^i_j = [T_a]^i_k\,\delta^k_j - [T_a]^k_j\,\delta^i_k = [T_a]^i_j - [T_a]^i_j = 0 \tag{10.17}$$

であるから，$\delta^{i_1}_{j_1}$ はどの $SU(3)$ 変換でも変化しない．$SU(3)$ には他にもう二つの不変テンソルがある —— 完全反対称テンソル ϵ^{ijk} と ϵ_{ijk} である．これらは，T_a がトレースゼロなので不変である．その変化分

$$[T_a\,\epsilon]^{ijk} = [T_a]^i_\ell\,\epsilon^{\ell jk} + [T_a]^j_\ell\,\epsilon^{i\ell k} + [T_a]^k_\ell\,\epsilon^{ij\ell} \tag{10.18}$$

を考える．これは完全反対称だから，例えばその 123 成分を見ればよい ——

$$\begin{aligned}[T_a\ \epsilon]^{123} &= [T_a]^1_\ell\,\epsilon^{\ell 23} + [T_a]^2_\ell\,\epsilon^{1\ell 3} + [T_a]^3_\ell\,\epsilon^{12\ell} \\ &= [T_a]^1_1\,\epsilon^{123} + [T_a]^2_2\,\epsilon^{123} + [T_a]^3_3\,\epsilon^{123} = 0\end{aligned} \tag{10.19}$$

したがって ϵ^{ijk} は不変である．

10.5 Clebsch-Gordan 分解

テンソルを使えば，テンソル積をあらわに分解することが出来る．u が n 個の上付き添字と m 個の下付き添字を持つテンソル，v が p 個の上付き添字と q 個の下付き添字を持つテンソル，としよう．そうするとテンソルの定義より，テンソル成分の積で定義されるその積 $u \otimes v$ が

$$[u \otimes v]^{i_1\cdots i_n i'_1\cdots i'_p}_{j_1\cdots j_m j'_1\cdots j'_q} = u^{i_1\cdots i_n}_{j_1\cdots j_m}\,v^{i'_1\cdots i'_p}_{j'_1\cdots j'_q} \tag{10.20}$$

テンソル積の状態 $|u\rangle \otimes |v\rangle$ を記述するテンソルであることがわかる．したがって，テンソル積の分解は，テンソル—対応する状態の波動関数，を扱って行うこ

とが出来る．この分解を行う一般的な戦略は，テンソルの積から既約表現を作り，元の積を種々な既約な組み合わせに比例する項の和として表すこと，である．この手続きの利点は，しばしば我々が知りたいものである波動関数自身を直接扱う点にある．

例として，$3 \otimes 3$ を考えよう．二つの 3 表現を u^i と v^j とすれば，その積は

$$u^i\, v^j = \frac{1}{2}\left(u^i\, v^j + u^j\, v^i\right) + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\,\epsilon_{k\ell m}\, u^\ell\, v^m \tag{10.21}$$

の形に書ける．第一項

$$\frac{1}{2}\left(u^i\, v^j + u^j\, v^i\right) \tag{10.22}$$

は，6 表現として変換する．これは最高ウェイト状態 $u^1\, v^1$ を含む．我々は，それが二つの上付き添字について完全対称になるように，したがって既約になるように，$u^j\, v^i$ の項を加えた．一つだけ下付き添字を持つ量

$$\epsilon_{k\ell m} u^\ell\, v^m \tag{10.23}$$

は，$\overline{3}$ として変換する．かくして，そのテンソル積をあらわに 6 と $\overline{3}$ とに分解したことになる．これは，単に

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus \overline{3} \tag{10.24}$$

あるいは

$$(1,0) \otimes (1,0) = (2,0) \oplus (0,1) \tag{10.25}$$

を示しただけではなく，要求される対称性を持った波動関数を実際にどう作るのかを教えている．後に，これがある種の計算をどのように簡単化するのかを見るだろう．

また，(10.23) におけるように，二つ以上の上付き添字を持つテンソルが完全対称でない時はいつでも，ϵ テンソルを用いて，二つの上付き添字を一つの下付き添字に換えることが出来るが，そのやり方に注意しておこう．

次に $3 \otimes \overline{3}$，すなわち，(3 の) u^i と ($\overline{3}$ の) v_j の積，を考えよう．積は

$$u^i\, v_j = \left(u^i\, v_j - \frac{1}{3}\delta^i_j\, u^k\, v_k\right) + \frac{1}{3}\delta^i_j\, u^k\, v_k \tag{10.26}$$

と書ける．括弧でくくった第一項はトレースがゼロで 8 表現として変換する．他方，添字のないテンソル $u^k v_k$ は，自明な表現 (0,0) あるいは 1 として変換する．よって，

$$3 \otimes \overline{3} = 8 \oplus 1 \tag{10.27}$$

あるいは

$$(1,0)\otimes(0,1)=(1,1)\oplus(0,0) \tag{10.28}$$

不変テンソル δ^i_j の役割に注意しよう．何故トレースゼロのテンソルだけが既約なのかを理解する一つの方法は，もしあるテンソルのトレースがゼロでなければ，δ テンソルを使って添字の個数の少ない0でないテンソルが作れ，したがってそれがあらわに簡約できる，ということである．

もう一つの例 —— (3の) u^i 掛ける (8の) v^j_k：

$$\begin{aligned} u^i\,v^j_k = \frac{1}{2}\left(u^i\,v^j_k + u^j\,v^i_k - \frac{1}{4}\delta^i_k\,u^\ell\,v^j_\ell - \frac{1}{4}\delta^j_k\,u^\ell\,v^i_\ell\right) \\ + \frac{1}{4}\epsilon^{ij\ell}\left(\epsilon_{\ell mn}\,u^m\,v^n_k + \epsilon_{kmn}\,u^m\,v^n_\ell\right) + \frac{1}{8}\left(3\delta^i_k\,u^\ell\,v^j_\ell - \delta^j_k\,u^\ell\,v^i_\ell\right) \end{aligned} \tag{10.29}$$

右辺の第一項は (2,1) (あるいは 15 —— それは15次元である)，第二項は$\overline{6}$，最後の項は 3 である．

$$3\otimes 8 = 15\oplus\overline{6}\oplus 3. \tag{10.30}$$

あるいは

$$(1,0)\otimes(1,1)=(2,1)\oplus(0,2)\oplus(1,0). \tag{10.31}$$

10.6　トライアリティ

これらのテンソル積の分解において，3を法とした $n-m$ (mod 3) が保存することに注意しよう．これは不変テンソルが皆 $n-m=0$ (mod 3) を持ち，よって，この量を変えることが出来ないからである．この量 $n-m$ (mod 3) は**トライアリティ** (triality) と呼ばれる．

10.7　内積と演算子

ブラ状態 $\langle v|$ は

$$\langle v| = v^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_m}{}^{*}\,\langle^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_n}| \tag{10.32}$$

である．代数の下でのブラの変換には余分なマイナス符号が付く．例えば，3重項のブラ $\langle_i|$ は

$$-\langle_i|T_a = -\langle_i|T_a|_j\rangle\langle_j| = -[T_a]^i_j\langle_j| \tag{10.33}$$

のように変換する．言葉で言えば，これは，下付き添字のブラ状態があたかも一つの上付き添字を持っているかのように変換する，と言っている．これは，ブラからケットへ行く際に含まれる複素共役のためである．同様に，上付き添字のブラは，あたかも下付き添字を持っているかのように変換する．このことは，ブラ状態に対応するテンソルとしては，添字の上下をひっくり返して定義すべきことを示唆している．そうすれば (10.33) 式における添字の縮約もうまく行っている．それゆえ，ブラテンソル $\langle v|$ のテンソル成分は

$$\overline{v}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_n} \equiv v^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_m}{}^{*} \tag{10.34}$$

であると言うことにする．そうすると，(10.32) 式は

$$\langle v| = \overline{v}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_n} \left\langle {}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_n} \right| \tag{10.35}$$

のようになる．それゆえ，状態 $\langle v|$ が $-\langle v|T_a$ と変換するとき，テンソル $\overline{v}$ は $T_a\overline{v}$ と変換することになる．

一例として，内積

$$\begin{aligned}\langle u|v\rangle &= \overline{u}^{k_1\cdots k_m}_{\ell_1\cdots \ell_n}\, v^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_m} \left\langle {}^{k_1\cdots k_m}_{\ell_1\cdots \ell_n} \middle| {}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_n} \right\rangle \\ &= \overline{u}^{k_1\cdots k_m}_{\ell_1\cdots \ell_n}\, v^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_m}\, \delta^{i_1}_{k_1}\cdots\delta^{i_m}_{k_m}\, \delta^{\ell_1}_{j_1}\cdots\delta^{\ell_n}_{j_n} \\ &= \overline{u}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_n}\, v^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_m}\end{aligned} \tag{10.36}$$

を考えよう．すべての添字はくり返されており，和がとられている (簡単に**縮約**されているという)．内積は不変であるからこれは当然そうあるべきである．

10.8　規格化

(10.36) 式の系は，もし状態 $|v\rangle$ が $\langle v \mid v\rangle = 1$ と規格化されていれば，そのテンソル成分は規格化条件

$$\sum_{\substack{i_1\cdots i_m \\ j_1\cdots j_n}} |\, v^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_m} \,|^2 = 1 \tag{10.37}$$

を満たさねばならない．例えば，(10.15) のテンソル v_H は，和の中でただ一つの項だけが効いているので，(10.37) を満たす．しかし，

$$N(2\,\delta^j_1\delta^1_k - \delta^j_2\delta^2_k - \delta^j_3\delta^3_k) \tag{10.38}$$

の形のテンソルは，次のノルムを持つ状態を記述する．

$$|N|^2 \sum_{j,k}(2\,\delta^j_1\delta^1_k - \delta^j_2\delta^2_k - \delta^j_3\delta^3_k)^2$$
$$= |N|^2\Big(\overbrace{4}^{j=k=1} + \overbrace{1}^{j=k=2} + \overbrace{1}^{j=k=3}\Big) = 6\,|N|^2 \tag{10.39}$$

10.9 テンソル演算子

テンソルの概念は，明らかなやり方でテンソル演算子の係数を含むように拡張できる．例えば，一組の演算子 O が $SU(3)$ の (n,m) 表現として変換するなら，我々は一般の線形結合

$$W = w^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_m}\,O^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_n} \tag{10.40}$$

を作れるが，W が生成子との交換関係で変換するなら，係数 $w^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_m}$ は，(n,m) 表現，すなわち (10.13) のように変換する．

10.10 (n,m) 表現の次元

テンソルの方法のごく簡単な応用は，既約表現 (n,m) の次元を計算することである．表現の次元は，テンソルにおける独立な成分の数である．(n,m) 表現のテンソルは n 個の上付きと m 個の下付き添字を持ち，それぞれで対称である．

1 から 3 まで走る添字を n 個持つ対称な量の独立成分の個数は，n 個の同種の対象を二つの同種の仕切りで分ける場合の数に等しく，その数は

$$\binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)!}{n!\,2!} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \tag{10.41}$$

である．だから他に制限がなければ，独立な係数の数は

$$B(n,m) = \frac{(n+2)(n+1)}{2}\frac{(m+2)(m+1)}{2} \tag{10.42}$$

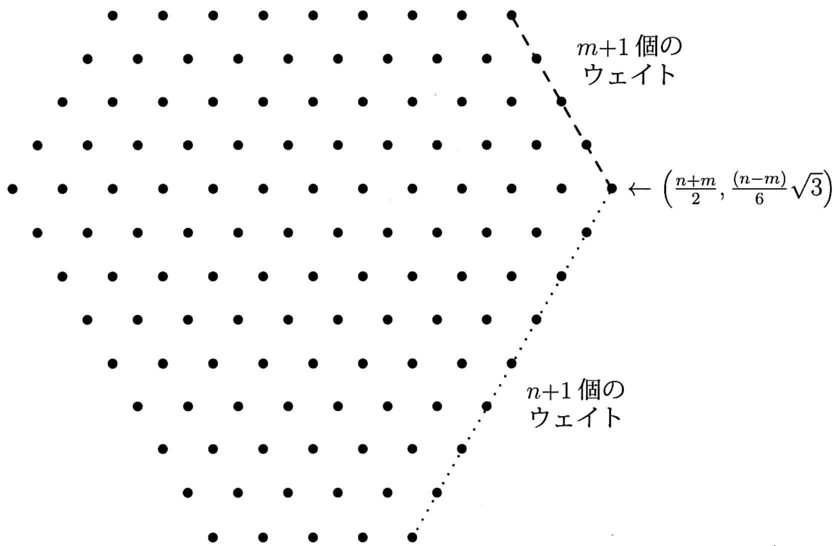
となる．しかし，今のテンソルにはトレースがゼロという要求もある．これは，トレースをとって得られる，$n-1$ 個の上付き添字と $m-1$ 個の下付き添字に関して対称な量が消えることを言うので，$B(n-1,m-1)$ 個の制限を課すことになる．結局，総計は

$$
\begin{aligned}
D(n,m) &= B(n,m) - B(n-1,m-1) \\
&= \frac{(n+2)(n+1)}{2}\frac{(m+2)(m+1)}{2} - \frac{(n+1)n}{2}\frac{(m+1)m}{2} \\
&= \frac{(n+1)(m+1)\Big[(n+2)(m+2) - nm\Big]}{4} \\
&= \frac{(n+1)(m+1)(n+m+2)}{2}
\end{aligned}
\tag{10.43}
$$

(n,m) 表現の次元 $D(n,m)$ に対するこの公式は，これまで議論してきた小さな既約表現に対して，うまく行っていることを確かめることが出来る．

10.11 * (n,m) 表現のウェイト

$SU(3)$ の既約表現 (n,m) に関して知っていることの様々な断片を，今やまとめることが出来る．$SU(3)$ の一般の既約表現 (n,m) は，以下に n=8, m=4 に対して例示するように，六角形の形を持つ．

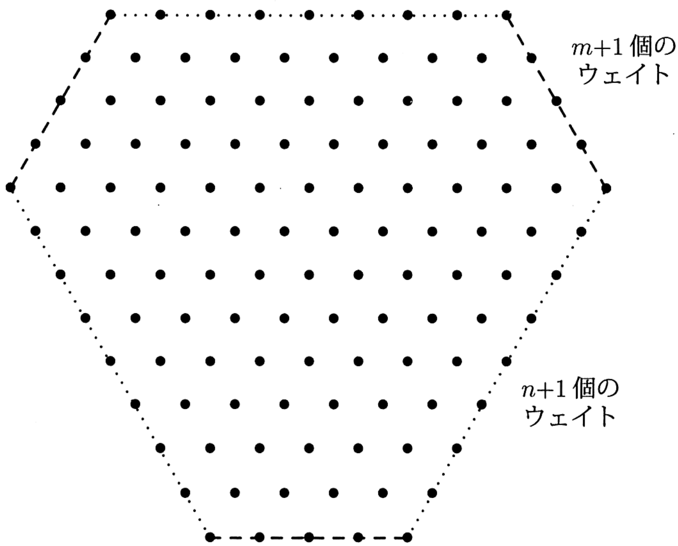


(10.44)

最高ウェイトには矢印を付けた．点線に沿ってのウェイトへは最高ウェイトから降演算子 $E_{-\alpha^1}$ をくり返し作用させて到達できる．したがって，六角形の点

線の辺には，最高ウェイトも数えて $n+1$ 個のウェイトがある．破線に沿ってのウェイトへは最高ウェイトから降演算子 $E_{-\alpha^2}$ をくり返し作用させて到達できる．したがって，六角形の破線の辺には，最高ウェイトも数えて $m+1$ 個のウェイトがある．n か m かが 0 の時，六角形は三角形に退化する．

Weyl 鏡映対称性は六角形が対称的であることを保証する．それゆえ，三つの破線の辺は下の図において等価である．三つの点線の辺もそうである．



(10.45)

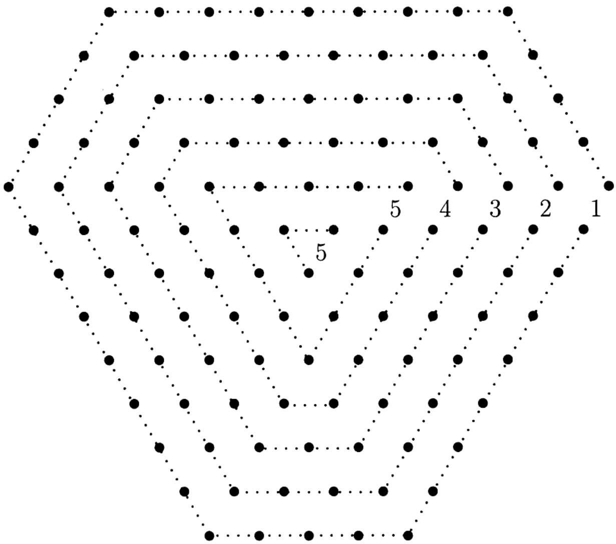
破線の辺と点線の辺が一緒にウェイトの一番外の層を形成しており，それらのウェイトは全て既約表現の一意的な状態に対応している．何故なら，それらは Weyl 鏡映によって，最高ウェイトから単純な降演算子で一意的に到達できる状態と等価であるからである．明らかに，この六角形の直ぐ内側の六角形を考えることにより次の層を定義でき，この手続きは，各ウェイトがどれかの "層" に割り当てられるまで続けることが出来る．

ここで次の結果をどのように証明するかを示そう:

定理 10.10 ある層から次の層へ行く時，三角形の層に達するまでは，層に属する状態に対するウェイト空間の縮退度は毎回 *1* ずつ増加する．三角形の層に達

してからは，縮退度は一定のままである．

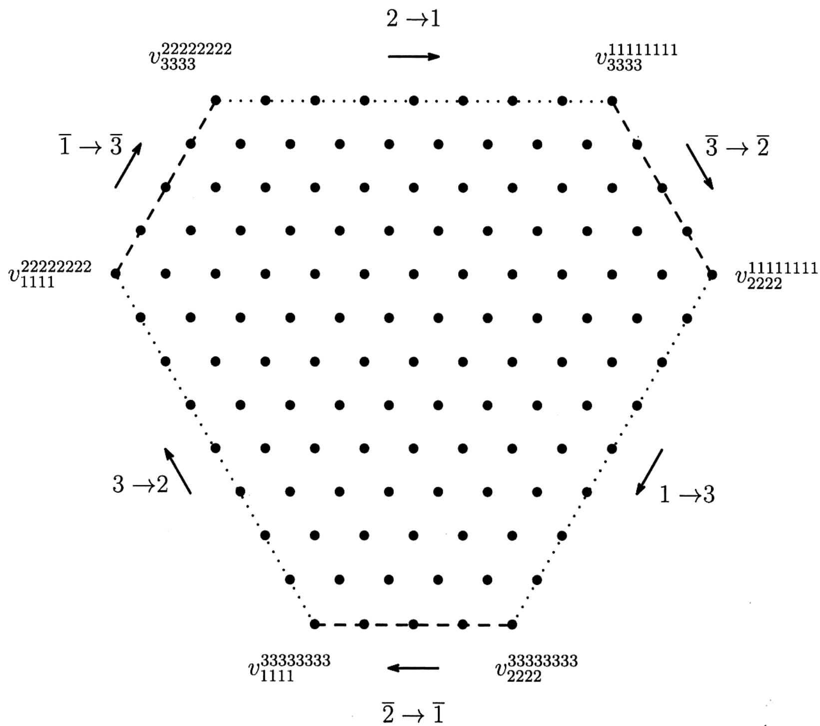
定理 10.10 は，我々の例の場合，層の縮退度が次の図に示したようになることを意味している．



(10.46)

我々は，これらの状態を表すテンソルの独立な成分を数えることによって，定理 10.10 を証明する．そこで我々は先ず，ウェイトからテンソル成分へ行く方法を理解しなければならない．初めに，トレースがゼロという条件のないテンソルを考えよう．そのようなテンソルは，単にその上付き添字と下付き添字のそれぞれに関して完全対称な一般の対象である．その後で，トレースの制限を扱うのに ((n,m) 表現の次元を求めた) 前節の戦略を用いる．この利点は，上で見たように，テンソルの成分が，各値の上付きと下付き成分の個数によって完全に決まるため，独立な状態を数えることが容易な点にある．ここで n 個の上付き添字と m 個の下付き添字のそれぞれに関して対称なテンソルを考えよう．これは可約な $SU(3)$ 表現に対応するが，我々の調べたい一般の既約表現 (n,m) を含んでいる．この可約表現のウェイト図は (10.44) と同じであるが，各ウェイトに対応する状態の縮退度は異なる (より大きい) かもしれない．一番外側の層は，しかしながら，この一般のテンソルに対しても縮退がない．というのは，それ

が上付き添字と下付き添字で同じ値を持つテンソル成分を含まず，トレースの制限がないからである．この最外層を各辺に沿って動くにつれ，次の図に描いたように一つの添字が別の値に変化する．(図中で $\overline{j}$ は下付きの j 添字を表す)



(10.47)

内側の層を扱うには，我々は先ず，テンソル成分とウェイトの間の関係を理解せねばならない．n 個の上付き添字と m 個の下付き添字を持つ一般のテンソルの特定の成分を考えよう．便宜のため，(図の例においてそうであるように) $n \geq m$ を仮定する．これは重大な制限ではない．なぜなら，そうでない場合，全てのウェイトの (縮退度は変えずに) 符号を変えて得られる，その表現の複素共役表現に対しては成立するからである．だから $n \geq m$ の表現を理解すれば，実際には全ての表現を理解したことになる．値 j を持つ上付き添字の個数を $z(j)$，値 j を持つ下付き添字の個数を $\overline{z}(j)$ と定義する．そうすると，例えば，このテンソルの最高ウェイトに対しては，$z(1) = n$，$\overline{z}(2) = m$ で，他は全てゼ

ロである．次の三つの量

$$z(1)-\overline{z}(1)\,,\qquad z(2)-\overline{z}(2)\,,\qquad z(3)-\overline{z}(3)\,, \tag{10.48}$$

が，テンソル成分に対応したウェイトと $n-m$ の値で決まっていることに注意しよう．簡単な計算により[1]，ウェイトベクトルの第 1 成分は

$$\mu_1=\frac{1}{2}[z(1)-\overline{z}(1)]-\frac{1}{2}[z(2)-\overline{z}(2)]\,. \tag{10.49}$$

を満たす．ウェイトベクトルの第 2 成分は

$$\mu_2=\frac{\sqrt{3}}{6}[z(1)-\overline{z}(1)]+\frac{\sqrt{3}}{6}[z(2)-\overline{z}(2)]-\frac{\sqrt{3}}{3}[z(3)-\overline{z}(3)]\,. \tag{10.50}$$

を満たす．そして $n-m$ は

$$n-m=[z(1)-\overline{z}(1)]+[z(2)-\overline{z}(2)]+[z(3)-\overline{z}(3)]\,. \tag{10.51}$$

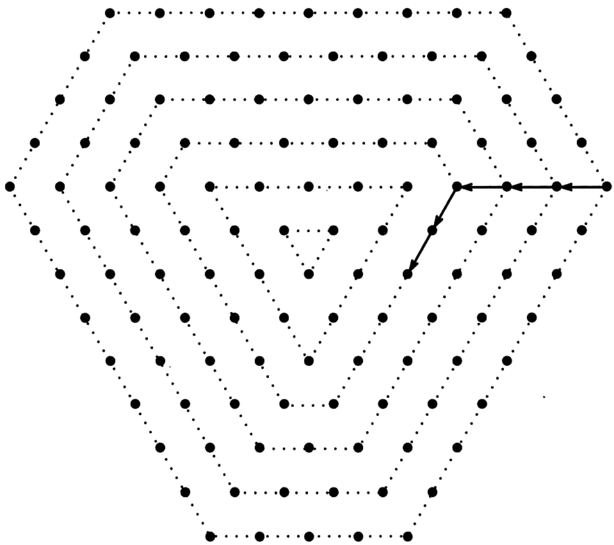
を満たす．したがって

$$\begin{aligned} z(1)-\overline{z}(1)&=\frac{1}{6}[6\mu_1+2\sqrt{3}\,\mu_2+2(n-m)]\\ z(2)-\overline{z}(2)&=\frac{1}{6}[-6\mu_1+2\sqrt{3}\,\mu_2+2(n-m)]\\ z(3)-\overline{z}(3)&=\frac{1}{3}[(n-m)-2\sqrt{3}\,\mu_2] \end{aligned} \tag{10.52}$$

実際の所は，この (10.52) を使うより，ウェイト図の上で動くにつれて，添字に起こる変化を考慮して，単に $z(j)-\overline{z}(j)$ に起こることを追いかける方が易しい．しかし，重要な点はとにかく上付き添字と下付き添字のこれらの差たちが全て固定されていることである．

さて，左側へ k ステップをとって k 番目の内側の層へ移動したとしよう．$k<m$ として未だ六角形の層に居ると仮定する (層の上-右の辺に乗っているウェイトの個数は，k が増える毎に一つずつ減るので，$k=m$ が最初の三角形層に達する曲がり角である —— 我々はあとでこの点に戻ろう)． そこから，下の図に示すように，k 番目の内側の層の上で j ステップ下がる ($k=3$，$j=2$ の例を示す):

[1](訳者注) テンソル添字の値 1,2,3 と，ウェイトベクトルとの関係は 3 表現の (10.1) 式，および $\overline{3}$ 表現の (10.4) 式で与えられる．



$$(10.53)$$

左へ水平に動くときは，添字の変化が各ステップで，$1 \to 2$ か，$\overline{2} \to \overline{1}$ か，$1 \to 3$ で $\overline{2} \to \overline{3}$ か，のいずれかが起こる((10.47)を見よ)ので，$z(1) - \overline{z}(1)$ は1だけ減り，$z(2) - \overline{z}(2)$ は1だけ増える．同様に，k 番目の層を下がるときは，各ステップで，$z(1) - \overline{z}(1)$ が1だけ減り，$z(3) - \overline{z}(3)$ が1だけ増える．したがって

$$\begin{aligned} z(1) - \overline{z}(1) &= n - k - j \\ z(2) - \overline{z}(2) &= -(m - k) \\ z(3) - \overline{z}(3) &= j \end{aligned} \tag{10.54}$$

今や我々は成分の数を勘定することが出来る．(10.54)は，そのテンソル成分が[2]

$n - k - j$ 個の 1，　$m - k$ 個の $\overline{2}$，　j 個の 3，　(10.55)
さらに k 個の ℓ-$\overline{\ell}$ 対 $(\ell = 1, 2, 3)$

で書けていることを意味する．この ℓ-$\overline{\ell}$ 対は $z(\ell) - \overline{z}(\ell)$ の値には寄与しない――それらはウェイトには影響しないが，異なる独立なテンソル成分を与える．そ

[2](訳者注) この式中で原著では対を j-$\overline{j}$ と記していたが，3の個数 j と紛らわしいので ℓ-$\overline{\ell}$ 対と書き直した．

れゆえ，このウェイトを得る方法の数は，これら k 個の対を選ぶ異なる方法の数である．それは

$$\binom{k+2}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2} \tag{10.56}$$

で与えられる．これが k だけに依存していること —— すなわち，それが層だけに依り，層の中のどこかということに依らないこと，に注意しよう．このことが水平線より上のウェイトに対しても成り立つことは容易にわかる．議論は同様なのでこれは読者の練習問題に残しておく．(10.56) は，n 個の上付き添字と m 個の下付き添字を持つ一般のテンソルの場合の独立成分の数である．トレースがゼロのテンソルの場合の成分の数は，トレースにおいて同じウェイトを持つ独立成分の数をこれから引いたものである．トレースは，$n-1$ 個の上付き添字と $m-1$ 個の下付き添字を持つ一般のテンソルである．その最高ウェイトは，(n,m) の最高ウェイトの 1 ステップ左である．このテンソルの最高ウェイトから，同じウェイトに達するためには $k-1$ ステップしか要らない．よって，トレースの成分の数は，(10.56) 式で $k \to k-1$ としたもので，トレースゼロのテンソルの独立成分の数は，

$$\binom{k+2}{2} - \binom{k+1}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2} - \frac{(k+1)k}{2} = k+1\,. \tag{10.57}$$

これは単純に，中の層へ行くごとに縮退度が 1 ずつ増えることを意味しており，定理 10.10 の主張と一致している．

この分析は $k = m$(を含め) まで正しい．しかし $k > m$，すなわち最初の三角形層の後になると，(10.55) は，$\overline{2}$ の個数が負にはなれないので，意味をなさない．その代わりに，成分は

$$\begin{aligned} &n-k-j \text{ 個の } 1, \quad k-m \text{ 個の } 2, \quad j \text{ 個の } 3, \\ &\text{さらに } m \text{ 個の } \ell\text{-}\overline{\ell} \text{ 対 } (\ell = 1,2,3) \end{aligned} \tag{10.58}$$

のようにならねばならない．よってこの層から後は，m が k の役割をし，縮退度はずっと $m+1$ にとどまる． これで定理 10.10 の証明を完了した．

10.12 Wigner-Eckart 定理の一般化

テンソル状態で挟んだテンソル演算子の行列要素

$$\langle u|W|v\rangle \tag{10.59}$$

を考える．これは実際，各表現が (表現の次元だけ) 多くの成分を持つので，極めて多数の可能な行列要素を表す略記である．v，u，W の表現は既約であると仮定しよう．そうすると，対称性が様々な可能な行列要素の間の関係式の存在を保証するだろうと期待できる．例えば，$SU(2)$ のテンソル演算子の場合，全ての行列要素が一個の数で決定されたことを我々は知っている．この場合の対称性からの帰結を決定するために，状態 $W|v\rangle$ を既約表現に分解したと想定してみる．その時我々は行列要素には，u と同じ既約表現として変換する表現しか効かないことを知っている．これは Schur の補題から従う．また Schur の補題のために，その表現の中に u が現れる毎に，その寄与は，行列要素が u 表現の空間の中で恒等元に比例するので，単一の未知の数で決まる．それゆえ，テンソル積 $W\otimes v$ に u の表現が現れる毎にそれぞれに対し一つの (そして唯一の) 未知定数が存在する．しかしながら，この場合と $SU(2)$ の場合には重要な違いが一つある．ここでは u は，$W|v\rangle$ の分解の中に二回以上出てきても良いのである．

テンソル解析を使えば，対称性から従う制限のすべてを自動的に組み込んだ，行列要素 (10.59) に対する表式を，比較的容易に書くことが出来る．(10.9)，(10.35)，(10.40) のため，行列要素は $|v\rangle$ の成分

$$v^{i_1\cdots i_n}_{j_1\cdots j_m} \tag{10.60}$$

と，W の成分

$$W^{k_1\cdots k_a}_{\ell_1\cdots \ell_b} \tag{10.61}$$

と，$\langle u|$ の複素共役成分

$$\overline{u}^{i'_1\cdots i'_{n'}}_{j'_1\cdots j'_{m'}} \tag{10.62}$$

に比例するだろう．行列要素全体は不変でなければならない．このことは，行列要素に対する答えにおいて，全ての添字がお互いに，あるいは不変テンソル (すなわち δ や ϵ) と縮約されていなければならないことを意味する．同じことを言い換えれば，行列要素

$$\begin{aligned}&\left\langle^{i'_1\cdots i'_{n'}}_{j'_1\cdots j'_{m'}}\right|O^{\ell_1\cdots\ell_b}_{k_1\cdots k_a}\left|^{j_1\cdots j_m}_{i_1\cdots i_n}\right\rangle\\&=\Gamma^{\ell_1\cdots\ell_b j_1\cdots j_m j'_1\cdots j'_{m'}}_{i_1\cdots i_n k_1\cdots k_a i'_1\cdots i'_{n'}}\end{aligned} \tag{10.63}$$

自身が不変テンソル —— δ や ϵ からなる項の和，でなければならないということである．

ここで後でいくぶん興味がある例を示そう．u，W，v が皆 8 表現であるとする．この例は，$\overline{u}$，W，v が皆，上付き添字を行，下付き添字を列のラベルとする行列と考えることが出来るので，特に解析が容易である．それゆえ，例えば，

$$W^i_j \, v^j_k = [W\, v]^i_k \tag{10.64}$$

全ての添字が縮約されている一つの項は，行列の掛け算をしてトレースをとって数にしたものである．そういう項は正確に二つある:

$$\mathrm{Tr}(\overline{u}\, W\, v) \quad \text{and} \quad \mathrm{Tr}(\overline{u}\, v\, W) \tag{10.65}$$

二つあるのは，テンソル積 $8 \otimes 8$ が 8 表現を二回含むからである．したがって，この場合行列要素は

$$\lambda_1 \, \mathrm{Tr}(\overline{u}\, W\, v) + \lambda_2 \, \mathrm{Tr}(\overline{u}\, v\, W) \tag{10.66}$$

となり，ここで λ_1 と λ_2 は ($SU(2)$ の場合の Wigner-Eckart 定理の既約行列要素のように) 群論ではなく物理によって決められねばならない定数である．これは $8^3 = 512$ 個の行列要素全てが，この二つのパラメータで決まることを意味する! しかも，全ての行列要素が，しゃれた表とかその他もろもろを必要とせず，単に行列の掛け算で関係づけられていることがわかる．

もう一つ例を挙げる —— u と v が 10 で，W が 8 としよう．行列要素は $|v\rangle$ のテンソル成分

$$v^{i_1 i_2 i_3} \tag{10.67}$$

と，W のテンソル成分

$$W^k_\ell \tag{10.68}$$

と，$\langle u|$ の複素共役成分

$$\overline{u}_{j_1 j_2 j_3} \tag{10.69}$$

に比例するだろう．この場合，容易にわかるように，添字を縮約する方法は一通りしかない ($\overline{u}$ や v が完全対称だから)．

$$\overline{u}_{i_1 i_2 k} W^k_\ell v^{i_1 i_2 \ell} \tag{10.70}$$

したがって，行列要素は単一の既約行列要素で決定される．

$$\langle u|W|v\rangle = \lambda_1 \, \overline{u}_{i_1 i_2 k} W^k_\ell v^{i_1 i_2 \ell} \tag{10.71}$$

10.13　* $SU(2)$ のテンソル

$SU(3)$ の場合のテンソルの記述には，こんなに時間を費やしているのに，$SU(2)$ の場合のテンソルにはほとんど言及しなかったのは何故だろうと読者は不思議に思っているかもしれない．この疑問に対する回答は，実際，数学や物理というよりも多分に歴史や社会学である．$SU(2)$ の既約表現をテンソルで記述することは，おそらく必要がなかったので，単に余り使われなかったのである．$SU(2)$ の既約表現を扱う他のやり方を誰もが知っている．それでもやはり，$SU(2)$ に対してテンソル解析は有用であり，それがどのように働くかを見ておくことは教育的である．

$SU(2)$ に対するテンソル解析は $SU(3)$ の場合よりさらに簡単である．$SU(2)$ の場合には基本表現が一つ，2 重項，しかないからだ．だから，上付き添字を持つテンソルだけを見れば良く，トレースの制限はない．ϵ 記号は，$SU(3)$ の場合は三つであったが，今は二つの添字を持つ．$SU(3)$ の場合には ϵ テンソルは二つの上付き添字を一つの下付きに下げるのに使えたが，$SU(2)$ の場合には，ϵ テンソルは単に二つの上付き添字を完全につぶすだけである．このことは既約表現が完全対称テンソルに対応することを意味する．何故なら，n 個の添字を持つテンソルが完全対称でなければ，二つの添字を ϵ で縮約して $n-2$ 個の添字を持つゼロでないテンソルを作れ，表現が簡約できるからである．明らかに，n 個の完全対称な添字を持つテンソルは，全ての添字が 1 である最高ウェイト状態が $J_3 = n/2$ を持つので，既約なスピン $n/2$ 表現に対応する．

$SU(2)$ の既約表現はそのような簡単なテンソルに対応するので，それらをあらわに書き下すことが出来る．スピン s 表現に対応する，$2s$ 個の添字を持つテンソルを考えよう．そこで $J_3 = m$ を持つ成分を取り出そう．

1 の添字は各々 $J_3 = 1/2$ を担い，2 の添字は $J_3 = -1/2$ を担うから，$J_3 = m$ 状態は $s+m$ 個の 1 と $s-m$ 個の 2 の添字を持つテンソルに対応しなければならない．テンソル

$$v_{s,m}^{j_1 \cdots j_{2s}} \tag{10.72}$$

を，$s+m$ 個の添字が 1 (で残りの $s-m$ 個の添字が 2) の時に 1 に等しく，それ以外では 0 となるテンソルとして定義しよう．$2s$ 個の添字から $s+m$ 個の 1 を選ぶ方法の数は，

$$\binom{2s}{s+m} = \frac{(2s)!}{(s+m)!\,(s-m)!} \tag{10.73}$$

である．よって $v_{s,m}$ は $\binom{2s}{s+m}$ 個の項の和で与えられる．例えば，

$$v^{j_1 j_2 j_3}_{3/2,1/2} = \delta^{j_1}_1\,\delta^{j_2}_1\,\delta^{j_3}_2 + \delta^{j_1}_1\,\delta^{j_2}_2\,\delta^{j_3}_1 + \delta^{j_1}_2\,\delta^{j_2}_1\,\delta^{j_3}_1 \tag{10.74}$$

この状態 $|v_{s,m}\rangle$ は，正しく規格化されていない．二乗ノルムには，(10.72) の中の $\binom{2s}{s+m}$ 個の項のそれぞれから 1 の寄与がある．だから正しく規格化された状態は

$$|s,m\rangle = \binom{2s}{s+m}^{-1/2} |v_{s,m}\rangle \tag{10.75}$$

この定義の状態が，$SU(2)$ の昇降演算子のもとで正しく振る舞うことは容易に確かめられる．次にその使い方を説明しよう．

10.14　* テンソルから Clebsch-Gordan 係数

次の積を考える．

$$v^{i_1\cdots i_{2s_1}}_{s_1,m_1} \cdot v^{j_1\cdots j_{2s_2}}_{s_2,m_2} \tag{10.76}$$

テンソルの一般的性質から，これが s_1 と s_2 のテンソル積の中の一成分のように変換することを知っている．(10.76) は単なる積であるから，対応する規格化された状態は容易に書き下せる:

$$|s_1,s_2,m_1,m_2\rangle = \binom{2s_1}{s_1+m_1}^{-1/2} \binom{2s_2}{s_2+m_2}^{-1/2} |v_{s_1,m_1}\cdot v_{s_2,m_2}\rangle \tag{10.77}$$

テンソル積 (10.76) は，$2s_1$ 個の i 添字に関し対称で，$2s_2$ 個の j 添字に関しても別途対称なテンソルの空間に住んでいる．やりたいことは，このテンソル積空間を $SU(2)$ のもとで既約に変換する部分空間に分解することである．$s_1 \otimes s_2$ における色んなスピンに対応したテンソルを不変テンソルと組み合わせて，適当な対称性を持ったテンソルを作ることによって，これが出来る．

これの最も簡単な例は，スピン s_1+s_2 である．我々は，スピン s_1+s_2 の状態が $2s_1+2s_2$ 個の添字について完全対称なテンソル

$$|s_1+s_2,m_1+m_2\rangle = \binom{2s_1+2s_2}{s_1+s_2+m_1+m_2}^{-1/2} |v_{s_1+s_2,m_1+m_2}\rangle \tag{10.78}$$

で書けることを知っている．$v_{s_1+s_2,m_1+m_2}$ は完全対称だから，最初の $2s_1$ 個の添字について対称であり，最後の $2s_2$ 個の添字についても対称であるので，テンソル積 (10.76) と同じ空間にある．二つの状態 (10.77) と (10.78) のスカラー積は，「テンソル積状態においてスピン s_1+s_2 の状態を見いだす振幅は何か?」という問いに対する答である．言い換えれば，それは Clebsch-Gordan 係数である．

$$\langle s_1+s_2, m_1+m_2 \mid s_1, s_2, m_1, m_2\rangle \tag{10.79}$$

ところが，我々はこの行列要素を容易に定義から直接計算することもできる．何故なら

$$\begin{aligned} &\langle v_{s_1+s_2,m_1+m_2} \mid v_{s_1,m_1}\cdot v_{s_2,m_2}\rangle \\ &= \sum_{\substack{i_1\cdots i_{2s_1}\\ j_1\cdots j_{2s_2}}} \left(v_{s_1+s_2,m_1+m_2}^{i_1\cdots i_{2s_1}j_1\cdots j_{2s_2}}\right)^* v_{s_1,m_1}^{i_1\cdots i_{2s_1}}\cdot v_{s_2,m_2}^{j_1\cdots j_{2s_2}} \end{aligned} \tag{10.80}$$

ここで複素共役をとることは，テンソルが実なので不要である．この和は，見かけはおぞましいが，実は簡単に実行できる．右辺のテンソル $v_{s_1,m_1}\cdot v_{s_2,m_2}$ に対する1や2の配置の各々は，$v_{2s_1+2s_2}$ に対するある配置に対応している．$v_{2s_1+2s_2}$ は，正しい総数の1と2を持つあらゆる可能な配置を含むからである．したがって (10.80) の和は

$$\binom{2s_1}{s_1+m_1}\binom{2s_2}{s_2+m_2} \tag{10.81}$$

を与える．Clebsch-Gordan 係数に対する結果は

$$\begin{aligned} &\langle s_1+s_2, m_1+m_2 \mid s_1, s_2, m_1, m_2\rangle \\ &= \binom{2s_1}{s_1+m_1}^{1/2}\binom{2s_2}{s_2+m_2}^{1/2}\binom{2s_1+2s_2}{s_1+s_2+m_1+m_2}^{-1/2} \end{aligned} \tag{10.82}$$

特殊な場合にこれが正しいことは，昇降演算子を使って確かめることもできるが，テンソル計算は一般の結果をかなり容易に与えるのである．

10.15 * スピン s_1+s_2-1

テンソル積 (10.77) の中の，スピン s_1+s_2-1 に入っている成分は，テンソル $v_{s_1+s_2-1,m_1+m_2}$ に比例する．Clebsch-Gordan 係数を計算するためには，テンソル積のテンソル (10.76) の空間に入っているこのテンソルに比例した規格化された

状態を見つけなければならない．すなわち，我々は $v_{s_1+s_2-1,m_1+m_2}$ ($2s_1+2s_2-2$ 個の添字を持つ) に比例し，しかし $2s_1+2s_2$ 個の添字を持ち，最初の $2s_1$ 個の添字と最後の $2s_2$ 個の添字のそれぞれに関して対称な，テンソルを構成しなければならない．添字を二つ加えるには，不変テンソル ϵ^{ij} が必要である．すると次のテンソル

$$\epsilon^{i_1 j_1} v_{s_1+s_2-1,m_1+m_2}^{i_2\cdots i_{2s_1} j_2\cdots j_{2s_2}} \tag{10.83}$$

が作れる．ここで i 添字に関して対称化し，さらに j 添字に関して対称化せねばならない．この対称化をしたテンソルを

$$\mathcal{V}_{s_1+s_2-1,m_1+m_2,2s_1,2s_2}^{i_1\cdots i_{2s_1} j_1\cdots j_{2s_2}} \tag{10.84}$$

と呼ぼう．$\mathcal{V}$ の中の各項は，一つの $\epsilon^{i_r j_s}$ 因子に，それ以外の全ての添字を持つ $v_{s_1+s_2-1,m_1+m_2}$ が掛けられた形である．r の値の可能性が $2s_1$ 通り，s の値の可能性が $2s_2$ 通り，あることに対応して，$\mathcal{V}$ には $4s_1s_2$ 個の項がある．

テンソル $\mathcal{V}$ は正しく規格化されていない．規格化因子を N と呼ぼう．そうすれば Clebsch-Gordan 係数は

$$\begin{aligned}&\langle s_1+s_2-1, m_1+m_2 \mid s_1, s_2, m_1, m_2\rangle \\ &= N \binom{2s_1}{s_1+m_1}^{-1/2} \binom{2s_2}{s_2+m_2}^{-1/2} \\ &\quad \sum_{\substack{i_1\cdots i_{2s_1}\\ j_1\cdots j_{2s_2}}} \left(\mathcal{V}_{s_1+s_2-1,m_1+m_2,2s_1,2s_2}^{i_1\cdots i_{2s_1} j_1\cdots j_{2s_2}}\right)^* v_{s_1,m_1}^{i_1\cdots i_{2s_1}} \cdot v_{s_2,m_2}^{j_1\cdots j_{2s_2}}\end{aligned} \tag{10.85}$$

となる．(10.85) における和は，$\mathcal{V}$ の中の $4s_1s_2$ 個の各項が皆同じ結果を与えるので，容易に簡単化できる．これがそうなのは，これらの項は i 添字や j 添字を対称化して作られたが，テンソル積はすでに i 添字や j 添字に関して対称だからである．前と同じく，複素共役は無関係である．よって (10.85) は

$$\begin{aligned}&\langle s_1+s_2-1, m_1+m_2 \mid s_1, s_2, m_1, m_2\rangle \\ &= N \binom{2s_1}{s_1+m_1}^{-1/2} \binom{2s_2}{s_2+m_2}^{-1/2} 4s_1s_2 \\ &\quad \sum_{\substack{i_1\cdots i_{2s_1}\\ j_1\cdots j_{2s_2}}} \epsilon^{i_1 j_1} \cdot v_{s_1+s_2-1,m_1+m_2}^{i_2\cdots i_{2s_1} j_2\cdots j_{2s_2}} \cdot v_{s_1,m_1}^{i_1\cdots i_{2s_1}} \cdot v_{s_2,m_2}^{j_1\cdots j_{2s_2}} \\ &= N \binom{2s_1}{s_1+m_1}^{-1/2} \binom{2s_2}{s_2+m_2}^{-1/2} 4s_1s_2\end{aligned}$$

$$\cdot\left[\binom{2s_1-1}{s_1+m_1-1}\binom{2s_2-1}{s_2+m_2}-\binom{2s_1-1}{s_1+m_1}\binom{2s_2-1}{s_2+m_2-1}\right] \quad (10.86)$$

と書き直せる．ただし，最後の行は，和の中で $\epsilon^{i_1j_1}$ のゼロでない二つの値を単に展開して

$$\sum_{\substack{i_2\cdots i_{2s_1}\\ j_2\cdots j_{2s_2}}} v^{i_2\cdots i_{2s_1}j_2\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-1,m_1+m_2}\cdot\left(v^{1\,i_2\cdots i_{2s_1}}_{s_1,m_1}\cdot v^{2\,j_2\cdots j_{2s_2}}_{s_2,m_2}-v^{2\,i_2\cdots i_{2s_1}}_{s_1,m_1}\cdot v^{1\,j_2\cdots j_{2s_2}}_{s_2,m_2}\right) \quad (10.87)$$

を得ることにより，導ける．

(10.85) 式の N を計算するため，$|\mathcal{V}|^2$ を計算する．そこで片一方の $\mathcal{V}$ を展開すると，他方の $\mathcal{V}$ の対称性のため，各項は皆は同じ結果を与えることに注意して，

$$\begin{aligned}1/N^2 &= \sum_{\substack{i_1\cdots i_{2s_1}\\ j_1\cdots j_{2s_2}}}\left|\mathcal{V}^{i_1\cdots i_{2s_1}j_1\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-1,m_1+m_2,2s_1,2s_2}\right|^2\\ &= 4s_1s_2\sum_{\substack{i_1\cdots i_{2s_1}\\ j_1\cdots j_{2s_2}}}\epsilon^{i_1j_1}\,v^{i_2\cdots i_{2s_1}j_2\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-1,m_1+m_2}\,\mathcal{V}^{i_1\cdots i_{2s_1}j_1\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-1,m_1+m_2,2s_1,2s_2}\end{aligned} \quad (10.88)$$

ここで $\mathcal{V}$ を展開して (10.88) の i_1 と j_1 に関する和をとることができる．これを実行可能にしているのは，C をある定数として，

$$\sum_{i_1,j_1}\epsilon^{i_1j_1}\,\mathcal{V}^{i_1\cdots i_{2s_1}\,j_1\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-1,m_1+m_2,2s_1,2s_2}=C\,v^{i_2\cdots i_{2s_1}\,j_2\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-1,m_1+m_2} \quad (10.89)$$

という式が成り立つという事実である．それゆえ

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{i_1\cdots i_{2s_1}\\ j_1\cdots j_{2s_2}}}\epsilon^{i_1j_1}\,v^{i_2\cdots i_{2s_1}j_2\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-1,m_1+m_2}\,\mathcal{V}^{i_1\cdots i_{2s_1}j_1\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-1,m_1+m_2,2s_1,2s_2}\\ &=C\sum_{\substack{i_2\cdots i_{2s_1}\\ j_2\cdots j_{2s_2}}}\left|v^{i_2\cdots i_{2s_1}j_2\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-1,m_1+m_2}\right|^2=C\binom{2s_1+2s_2-2}{s_1+s_2-1+m_1+m_2}\end{aligned} \quad (10.90)$$

C を計算するため，先ず，$\mathcal{V}$ の中の $\epsilon^{i_1j_1}$ に比例する項が，

$$\sum_{i_1\,j_1}\left|\epsilon^{i_1j_1}\right|^2=2 \quad (10.91)$$

なので 2 の寄与をすることに注意する．次に，$\epsilon^{i_1j_m}$ $(m\neq 1)$ に比例する項は 1 を与える．なぜなら，

$$\sum_{i_1}\epsilon^{i_1j_1}\,\epsilon^{i_1j_m}=\delta^{j_1j_m} \quad (10.92)$$

であり，j_1 に関する和は単に $v^{i_2\cdots i_{2s_1}j_2\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-1,m_1+m_2}$ を再現するだけだからである．j_m の値は $2s_2-1$ 通り可能だから，そのような項は C に合計 $2s_2-1$ だけ寄与する．同様に，$\epsilon^{i_m j_1}$ $(m\neq 1)$ に比例する項はさらに $2s_1-1$ だけ寄与する．他の項はすべて寄与がゼロである．したがって，$C=(2+2s_1-1+2s_2-1)=2s_1+2s_2$，そして

$$1/N^2 = 4\,s_1s_2(2s_1+2s_2)\binom{2s_1+2s_2-2}{s_1+s_2-1+m_1+m_2} \tag{10.93}$$

となる．これら全てを一緒にすれば，次式を得る:

$$\begin{aligned}
&\langle s_1+s_2-1, m_1+m_2 \mid s_1,s_2,m_1,m_2\rangle \\
&\quad = \binom{2s_1}{s_1+m_1}^{-1/2}\binom{2s_2}{s_2+m_2}^{-1/2} \\
&\qquad \cdot \binom{2s_1+2s_2-2}{s_1+s_2-1+m_1+m_2}^{-1/2}\left(\frac{2\,s_1s_2}{s_1+s_2}\right)^{1/2} \\
&\qquad \cdot \left[\binom{2s_1-1}{s_1+m_1-1}\binom{2s_2-1}{s_2+m_2}-\binom{2s_1-1}{s_1+m_1}\binom{2s_2-1}{s_2+m_2-1}\right]
\end{aligned} \tag{10.94}$$

10.16　* スピン s_1+s_2-k

一般の場合の解析は前節のそれと同様である．全スピンは，k を 0 と $|s_1-s_2|$ の間の整数として，s_1+s_2-k と書ける．テンソル積 (10.77) のスピン s_1+s_2-k に入っている成分はテンソル $v_{s_1+s_2-k,m_1+m_2}$ に比例する．Clebsch-Gordan 係数を計算するためには，テンソル積テンソル (10.76) の空間に入っているこのテンソルに比例した規格化された状態を見つけなければならない．すなわち，我々は $v_{s_1+s_2-k,m_1+m_2}$ ($2s_1+2s_2-2k$ 個の添字を持つ) に比例し，しかし $2s_1+2s_2$ 個の添字を持ち，最初の $2s_1$ 個の添字と最後の $2s_2$ 個の添字のそれぞれに関して対称な，テンソルを構成しなければならない．このためには，k 個の不変テンソル ϵ^{ij} が必要であり，次のテンソル

$$\epsilon^{i_1j_1}\cdots\epsilon^{i_kj_k}v^{i_{k+1}\cdots i_{2s_1}j_{k+1}\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-k,m_1+m_2} \tag{10.95}$$

を作れる．ここで i 添字に関して対称化し，さらに j 添字に関して対称化する．この対称化をしたテンソルは

$$\mathcal{V}^{i_1\cdots i_{2s_1}j_1\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-k,m_1+m_2,2s_1,2s_2} \tag{10.96}$$

$\mathcal{V}$ の中の各項は，k 個の $\epsilon^{i_r j_s}$ にそれ以外の添字を持つ $v_{s_1+s_2-k,m_1+m_2}$ が掛けられた形である．$\mathcal{V}$ の中の項の数は次のように勘定できる．最初の ϵ の i 添字は $2s_1$ 個の値のどれでも良いし，j 添字は $2s_2$ 個の値のどれでも良い．二番目の ϵ の i 添字は $2s_1-1$ 個の値のどれでも良いし，j 添字は $2s_2-1$ 個の値のどれでも良い．k 個の ϵ に対して以下同様．しかし，ϵ 達の順番は問題ではないから，これは $k!$ 倍だけ数えすぎである．よって，項の数は

$$\mu \equiv \frac{(2s_1)!}{(2s_1-k)!}\frac{(2s_2)!}{(2s_2-k)!}\frac{1}{k!} \tag{10.97}$$

再び，N を，$\mathcal{V}$ を正しく規格化するための規格化因子とする．その時，Clebsch-Gordan 係数は

$$\begin{aligned}&\langle s_1+s_2-k, m_1+m_2 \mid s_1, s_2, m_1, m_2\rangle \\ &= N\begin{pmatrix}2s_1\\ s_1+m_1\end{pmatrix}^{-1/2}\begin{pmatrix}2s_2\\ s_2+m_2\end{pmatrix}^{-1/2} \\ &\sum_{\substack{i_1\cdots i_{2s_1}\\ j_1\cdots j_{2s_2}}}\left(\mathcal{V}^{i_1\cdots i_{2s_1}j_1\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-k,m_1+m_2,2s_1,2s_2}\right)^* v^{i_1\cdots i_{2s_1}}_{s_1,m_1}\cdot v^{j_1\cdots j_{2s_2}}_{s_2,m_2}\end{aligned} \tag{10.98}$$

前と同じように，(10.98) の和は，$\mathcal{V}$ 中の μ 項の各々が同じ結果を与えるので，簡単化できる．複素共役もいつものように無関係である．よって，(10.98) は次のように書き直せる．

$$\begin{aligned}&\langle s_1+s_2-k, m_1+m_2 \mid s_1, s_2, m_1, m_2\rangle \\ &= N\begin{pmatrix}2s_1\\ s_1+m_1\end{pmatrix}^{-1/2}\begin{pmatrix}2s_2\\ s_2+m_2\end{pmatrix}^{-1/2}\mu \\ &\sum_{\substack{i_1\cdots i_{2s_1}\\ j_1\cdots j_{2s_2}}}\epsilon^{i_1j_1}\cdots\epsilon^{i_kj_k}\cdot v^{i_{k+1}\cdots i_{2s_1}j_{k+1}\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-k,m_1+m_2}\cdot v^{i_1\cdots i_{2s_1}}_{s_1,m_1}\cdot v^{j_1\cdots j_{2s_2}}_{s_2,m_2} \\ &= N\begin{pmatrix}2s_1\\ s_1+m_1\end{pmatrix}^{-1/2}\begin{pmatrix}2s_2\\ s_2+m_2\end{pmatrix}^{-1/2}\mu \\ &\cdot\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^\ell\begin{pmatrix}k\\ \ell\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2s_1-k\\ s_1+m_1-k+\ell\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2s_2-k\\ s_2+m_2-\ell\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{10.99}$$

ここで，最後の行において全ての ϵ を展開した．

(10.98) における N を計算するために，

$$1/N^2 = \sum_{\substack{i_1\cdots i_{2s_1}\\ j_1\cdots j_{2s_2}}} \left|\mathcal{V}^{i_1\cdots i_{2s_1} j_1\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-k,m_1+m_2,2s_1,2s_2}\right|^2$$
$$= \mu\,\epsilon^{i_1j_1}\cdots\epsilon^{i_kj_k}\,v^{i_{k+1}\cdots i_{2s_1}j_{k+1}\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-k,m_1+m_2}\,\mathcal{V}^{i_1\cdots i_{2s_1}j_1\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-k,m_1+m_2,2s_1,2s_2} \tag{10.100}$$

に注意しよう．さて，再び，$\mathcal{V}$ を展開して i_1 と j_1 についての和をとることが出来る．結果は添字が二つ少ない $\mathcal{V}$ に比例するだろう．

$$\sum_{i_1,j_1}\epsilon^{i_1j_1}\,\mathcal{V}^{i_1\cdots i_{2s_1}\,j_1\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-k,m_1+m_2,2s_1,2s_2} = C\,\mathcal{V}^{i_2\cdots i_{2s_1}\,j_2\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-k,m_1+m_2,2s_1-1,2s_2-1} \tag{10.101}$$

何故なら，i_1 と j_1 についての和は他の添字についての対称性に影響しないからである．(10.101) 式の係数 C は，右辺の展開の任意の一項，例えば，

$$\epsilon^{i_2j_2}\cdots\epsilon^{i_kj_k}\,v^{i_{k+1}\cdots i_{2s_1}j_{k+1}\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-k,m_1+m_2} \tag{10.102}$$

への全ての寄与を取り上げることによって，見いだすことが出来る．

$\mathcal{V}_{s_1+s_2-k,\,m_1+m_2,\,2s_1-1,\,2s_2-1}$ の中の特定の項 (10.102) に寄与する $\mathcal{V}_{s_1+s_2-k,\,m_1+m_2,\,2s_1,\,2s_2}$ の全ての項を調べて，係数 C へのそれらの寄与を見いだそう．

先ず，項

$$\epsilon^{i_1j_1}\epsilon^{i_2j_2}\cdots\epsilon^{i_kj_k}\,v^{i_{k+1}\cdots i_{2s_1}j_{k+1}\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-k,m_1+m_2} \tag{10.103}$$

は，2 だけ寄与する．

$$\epsilon^{i_1j_m}\epsilon^{i_2j_2}\cdots\epsilon^{i_kj_k}\,v^{i_{k+1}\cdots i_{2s_1}j_{k+1}\cdots j_{m-1}\,j_1\,j_{m+1}\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-k,m_1+m_2} \tag{10.104}$$

$(m>k)$ の形をした $2s_2-k$ 個の項は各々1 寄与する．

$$\epsilon^{i_mj_1}\epsilon^{i_2j_2}\cdots\epsilon^{i_kj_k}\,v^{i_{k+1}\cdots i_{m-1}\,i_1\,i_{m+1}\cdots i_{2s_1}j_{k+1}\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-k,m_1+m_2} \tag{10.105}$$

$(m>k)$ の形をした $2s_1-k$ 個の項も，同じく各々1 寄与する．

$$\epsilon^{i_1j_m}\epsilon^{i_mj_1}\epsilon^{i_2j_2}\cdots\epsilon^{i_{m-1}j_{m-1}}\epsilon^{i_{m+1}j_{m+1}}\cdots\epsilon^{i_kj_k}\,v^{i_{k+1}\cdots i_{2s_1}j_{k+1}\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-k,m_1+m_2} \tag{10.106}$$

の形の $k-1$ 個の項 $(2\le m\le k)$ は各々1 寄与する．

これら全てを一緒にして，$C = (2s_1 + 2s_2 - k + 1)$ を得る．よって

$$\sum_{i_1,j_1} \epsilon^{i_1 j_1} \mathcal{V}^{i_1\cdots i_{2s_1}\, j_1\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2, 2s_1, 2s_2} = (2s_1 + 2s_2 - k + 1)\, \mathcal{V}^{i_2\cdots i_{2s_1}\, j_2\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2, 2s_1-1, 2s_2-1} \tag{10.107}$$

この手続きをくり返し，同じように i_2 と j_2 についての和をとり，次に i_3 と j_3 についての和，等々．一般に

$$\sum_{i_{p+1},j_{p+1}} \epsilon^{i_{p+1} j_{p+1}}\, \mathcal{V}^{i_{p+1}\cdots i_{2s_1}\, j_{p+1}\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2, 2s_1-p, 2s_2-p} = C_p\, \mathcal{V}^{i_{p+2}\cdots i_{2s_1}\, j_{p+2}\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2, 2s_1-p-1, 2s_2-p-1} \tag{10.108}$$

ここで，$C_0 = C$ で

$$\mathcal{V}^{i_{k+1}\cdots i_{2s_1}\, j_{k+1}\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2, 2s_1-k, 2s_2-k} = v^{i_{k+1}\cdots i_{2s_1}\, j_{k+1}\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2} \tag{10.109}$$

上で C_0 に対して行ったように，C_p を計算するため，右辺の展開の中の特定の項，例えば，

$$\epsilon^{i_{p+2} j_{p+2}} \cdots \epsilon^{i_k j_k}\, v^{i_{k+1}\cdots i_{2s_1} j_{k+1}\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2} \tag{10.110}$$

への全ての寄与を調べることが出来る．

$\mathcal{V}_{s_1+s_2-k,\, m_1+m_2,\, 2s_1-p-1,\, 2s_2-p-1}$ の中の特定の項 (10.110) に寄与する $\mathcal{V}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2, 2s_1-p, 2s_2-p}$ の全ての項を調べて，係数 C_p へのそれらの寄与を見つけよう．

先ず，項

$$\epsilon^{i_{p+1} j_{p+1}} \epsilon^{i_{p+2} j_{p+2}} \cdots \epsilon^{i_k j_k}\, v^{i_{k+1}\cdots i_{2s_1} j_{k+1}\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2} \tag{10.111}$$

は，2 寄与する．．

$$\epsilon^{i_{p+1} j_m} \epsilon^{i_{p+2} j_{p+2}} \cdots \epsilon^{i_k j_k}\, v^{i_{k+1}\cdots i_{2s_1} j_{k+1}\cdots j_{m-1}\, j_{p+1}\, j_{m+1}\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2} \tag{10.112}$$

$(m > k)$ の形をした $2s_2 - k$ 個の項は各々1 寄与する．

$$\epsilon^{i_m j_{p+1}} \epsilon^{i_{p+2} j_{p+2}} \cdots \epsilon^{i_k j_k}\, v^{i_{k+1}\cdots i_{m-1}\, i_{p+1}\, i_{m+1}\cdots i_{2s_1} j_{k+1}\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2} \tag{10.113}$$

$(m > k)$ の形をした $2s_1 - k$ 個の項も，各々1 寄与する．

$$\epsilon^{i_{p+1}j_m}\epsilon^{i_m j_{p+1}}\epsilon^{i_{p+2}j_{p+2}}\cdots\epsilon^{i_{m-1}j_{m-1}}\epsilon^{i_{m+1}j_{m+1}}\cdots\epsilon^{i_k j_k}\, v^{i_{k+1}\cdots i_{2s_1}j_{k+1}\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-k,m_1+m_2} \tag{10.114}$$

の形の $k-p-1$ 個の項 $(p+2\le m\le k)$ は各々1寄与する.

したがって,

$$C_p = 2s_1+2s_2-k-p+1 \tag{10.115}$$

そして

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{i_1\cdots i_{2s_1}\\ j_1\cdots j_{2s_2}}} \epsilon^{i_1j_1}\cdots\epsilon^{i_kj_k}\, v^{i_{k+1}\cdots i_{2s_1}j_{k+1}\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-k,m_1+m_2}\, \mathcal{V}^{i_1\cdots i_{2s_1}j_1\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-k,m_1+m_2,2s_1,2s_2}\\
&\quad=\left(\prod_{p=0}^{k-1}C_p\right)\sum_{\substack{i_{k+1}\cdots i_{2s_1}\\ j_{k+1}\cdots j_{2s_2}}}\left|v^{i_{k+1}\cdots i_{2s_1}j_{k+1}\cdots j_{2s_2}}_{s_1+s_2-k,m_1+m_2}\right|^2\\
&\quad=\frac{(2s_1+2s_2-k+1)!}{(2s_1+2s_2-2k+1)!}\binom{2s_1+2s_2-2k}{s_1+s_2+k+m_1+m_2}
\end{aligned} \tag{10.116}$$

および

$$1/N^2=\mu\,\frac{(2s_1+2s_2-k+1)!}{(2s_1+2s_2-2k+1)!}\binom{2s_1+2s_2-2}{s_1+s_2-1+m_1+m_2} \tag{10.117}$$

今や材料は全て揃ったので，それらをまとめて積 $|s_1,m_1\rangle\times|s_2,m_2\rangle$ の中の $|s_1+s_2-k,m_1+m_2\rangle$ に対する Clebsch-Gordan 係数にすることが出来る.

$$\begin{aligned}
&\langle s_1+s_2-k,m_1+m_2\mid s_1,s_2,m_1,m_2\rangle\\
&=\left[\binom{2s_1+2s_2-2k}{s_1+s_2+m_1+m_2-k}\binom{2s_1}{s_1+m_1}\binom{2s_2}{s_2+m_2}\right]^{-1/2}\\
&\quad\cdot\left(\frac{(2s_1)!\,(2s_2)!}{k!}\right)^{1/2}\left(\frac{(2s_1+2s_2-2k+1)!}{(2s_1+2s_2-k+1)!}\right)^{1/2}\\
&\quad\cdot\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^\ell\binom{k}{\ell}\binom{2s_1-k}{s_1+m_1-k+\ell}\binom{2s_2-k}{s_2+m_2-\ell}\\
&=\left[\binom{2s_1+2s_2-2k}{s_1+s_2+m_1+m_2-k}\binom{2s_1}{s_1+m_1}\binom{2s_2}{s_2+m_2}\right]^{-1/2}\\
&\quad\cdot\left[\binom{2s_1}{k}\binom{2s_2}{k}\right]^{1/2}\left[\binom{2s_1+2s_2-k+1}{k}\right]^{-1/2}\\
&\quad\cdot\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^\ell\binom{k}{\ell}\binom{2s_1-k}{s_1+m_1-k+\ell}\binom{2s_2-k}{s_2+m_2-\ell}
\end{aligned} \tag{10.118}$$

この関係式は人間が使うには少し複雑であるが，任意の Clebsch-Gordan 係数を計算するコンピュータプログラムにコード化することは易しい．これはテンソル法のパワーを示す良い例である．

問題

10.A.　テンソルの成分の積 $u^i\, v^{jk}$ を既約分解せよ．ただし $v^{jk} = v^{kj}$ は $SU(3)$ の 6 表現として変換するものとする．

10.B.　T_a は $SU(3)$ 生成子，$|u\rangle$ と $|v\rangle$ は，それぞれ，u^i_j，v^i_j を成分とする $SU(3)$ の随伴表現のテンソル，とした時，行列要素 $\langle u|T_a|v\rangle$ を求めよ．結果をテンソル成分と (7.4) の λ_a 行列で表せ．

10.C.　$SU(3)$ の 6 表現において，各ウェイトに対して，対応するテンソル成分 v^{ij} を求めよ．．

***10.D**.

a.　この章で説明した $SU(2)$ テンソル法を用いて，問題 5.C を解き直せ．

b.　最高ウェイトの手続きを使ってスピン 3/2 状態とスピン 1 状態のテンソル積における状態 $|3/2, 1/2\rangle$ を求め，Clebsch-Gordan 係数

$$\langle 3/2, 1/2 \mid 1, 3/2, 0, 1/2\rangle$$

に対する (10.86) からの結果と比較することによって，(10.86) 式を確かめよ．

***10.E**.　アイソスピン対称性の破れを無視して πP 散乱を考えよう．(π^0 のビームや中性子のターゲットを作るのは難しいので) 簡単にアクセスできるのは次の三つの反応過程である:

$$\begin{aligned}
&\pi^+ p \to \pi^+ p\ ;\quad \text{振幅は}\ A_{+p} = \langle \pi^+ p|H_I|\pi^+ p\rangle \\
&\pi^- p \to \pi^- p\ ;\quad \text{振幅は}\ A_{-p} = \langle \pi^- p|H_I|\pi^- p\rangle \\
&\pi^- p \to \pi^0 n\ ;\quad \text{振幅は}\ A_{0n} = \langle \pi^0 n|H_I|\pi^- p\rangle
\end{aligned} \tag{1}$$

ここで H_I は相互作用ハミルトニアンで，近似的に $SU(3)$ 不変である．π 粒子と核子の波動関数を $SU(2)$ テンソルで，π 粒子を $\pi^{jk} = \pi^{kj}$，核子を N^j，と記述すれば，この反応過程の最も一般的振幅は次のように書ける:

$$\langle \pi\, N | H_I | \pi\, N \rangle = A_1\, \overline{\pi}_{jk}\, \overline{N}_\ell\, \pi^{jk}\, N^\ell + A_2\, \overline{\pi}_{jk}\, \overline{N}_\ell\, \pi^{j\ell}\, N^k \tag{2}$$

a. (2) 式と $SU(2)$ に対するテンソル解析についてのノートに記述したテクニックを用いて，(1) の三つの散乱振幅を A_1 と A_2 で書き，(1) の三つの振幅の間の関係式を見つけよ．

b. (1) の散乱振幅は，πN 状態を既約な $I = 3/2$ と $I = 1/2$ 表現に分解して Schur の補題を用いることにより，$I = 3/2$ 振幅と $I = 1/2$ 振幅の言葉でも書き表すことができる．これらの振幅を A_1 と A_2 で表せ．

第11章

ハイパーチャージとストレンジネス

ここで1950年代のストレンジ(奇妙な)粒子の発見に立ち戻ろう．その頃までにアイソスピンは，弱い相互作用や電磁相互作用で破られている，強い相互作用の近似的な対称性として十分確立していた．実験家達は，強い相互作用をする粒子の散乱において対(つい)で生成され，出来た後は，はるかにゆっくりと通常の粒子達へと崩壊する，奇妙な新しいクラスの粒子達に気づき始めていた．**ストレンジネス**と呼ばれる，加法的な量子数があって，それが強い相互作用(と電磁相互作用)では保存し弱い相互作用では保存しない，とすれば多くの物理が理解できる，ということが最終的に認識された．その量子数をSと呼ぼう．ゼロでない値のSを持つ粒子は，**ストレンジ粒子**と呼ばれる．

11.1 八道説

最も軽いストレンジ粒子は，K中間子である．$S=1$を持ちアイソスピン2重項の

$$\begin{aligned} K^+ &\ :\ I_3 = 1/2 \\ K^0 &\ :\ I_3 = -1/2 \end{aligned} \tag{11.1}$$

および，$S=-1$を持つその反粒子

$$\begin{aligned} \overline{K}^0 &\ :\ I_3 = 1/2 \\ K^- &\ :\ I_3 = -1/2 \end{aligned} \tag{11.2}$$

である．π中間子と同様，Kもスピン0でバリオン数0である．

ストレンジ**バリオン**(すなわちバリオン数+1を持つストレンジ粒子)も存在

する．$S=-1$ を持つものとして，**アイソ3重項** (すなわち，アイソスピン1表現の)

$$
\begin{aligned}
\Sigma^+ \quad &: \quad I_3 = 1 \\
\Sigma^0 \quad &: \quad I_3 = 0 \\
\Sigma^- \quad &: \quad I_3 = -1
\end{aligned}
\tag{11.3}
$$

および**アイソ一重項** (アイソスピン0) の

$$
\Lambda \quad : \quad I_3 = 0 \tag{11.4}
$$

がある．$S=-2$ を持つものに，**アイソ2重項** (アイソスピン1/2) の

$$
\begin{aligned}
\Xi^0 \quad &: \quad I_3 = 1/2 \\
\Xi^- \quad &: \quad I_3 = -1/2
\end{aligned}
\tag{11.5}
$$

が存在する．これらの粒子は皆，関係式[1]

$$
Q = T_3 + Y/2 \tag{11.6}
$$

を満たしている．ここに，Q は陽子電荷を単位とした電荷で，T_3 はアイソスピンの第3成分，Y は**ハイパーチャージ**と呼ばれる量子数で，

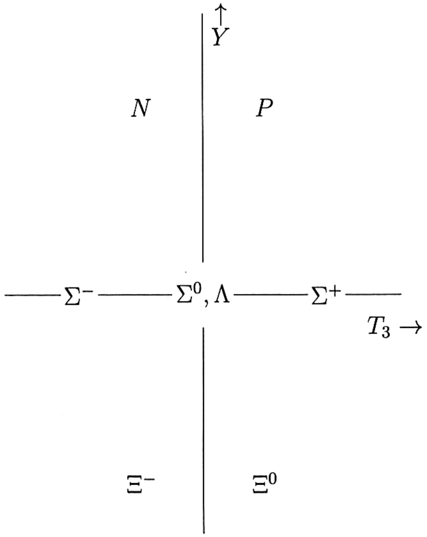
$$
Y = B + S \tag{11.7}
$$

で定義される．

バリオンに対して T_3 と Y の値をプロットしてみると，$SU(3)$ の8次元の随伴

[1](訳者注) ストレンジネスの量子数を最初に導入しこの公式を提唱した人達の名前を付けて，西島-Gell-Mann 公式，あるいは中野-西島-Gell-Mann 公式，と呼ばれる．

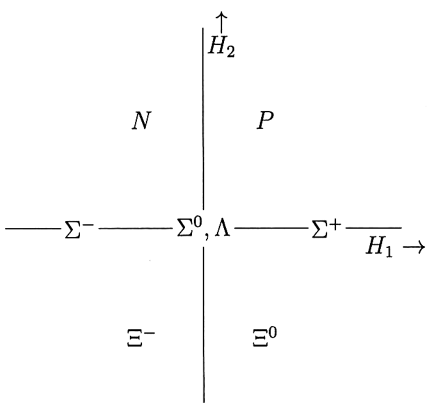
表現を示唆するプロットが得られる:



(11.8)

六角形を正六角形にするため，縦の縮尺を変え次のように選ぶ.

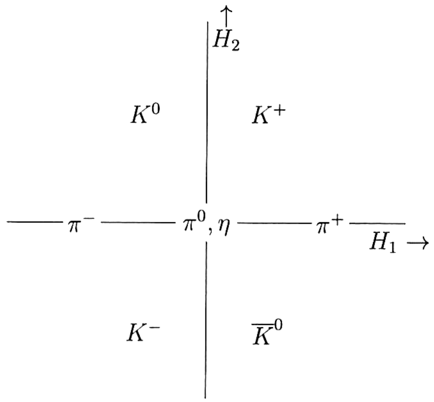
$$H_1 = T_3 \qquad H_2 = \sqrt{3}\,Y/2 \tag{11.9}$$



(11.10)

軽いスピン0中間子 (メソン) に対しても，もし $SU(3)$ が最初に議論されたときには見つかっていなかったいくぶん重い η メソンを加えれば，よく似たこ

とが成り立っている.



(11.11)

これらのプロットで示唆される $SU(3)$ 対称性は，1960 年の初め頃に強い相互作用と考えられていたものの対称性ではない．しかし，まもなく **Gell-Mann** は，強い相互作用を概念上二つの部分に分類できることに気づいた.

非常に強い相互作用 (VS); 軽いバリオンとメソンが 8 表現として変換する $SU(3)$ 対称性のもとで不変.

中位の強い相互作用 (MS); $SU(3)$ 対称性は破るが，T_1，T_2，T_3 で生成されるアイソスピンや，$2T_8/\sqrt{3}$ で生成されるハイパーチャージは保存. (11.12)

そのうえで彼は，強い相互作用について多くのことを理解するのに，$SU(3)$ 対称性が，アイソスピンのように，摂動論で使えることを示したのである.

11.2 Gell-Mann–大久保公式

$SU(3)$ は，単なる粒子の分類法をはるかに超えるものである．バリオンの質量を考えよう．バリオン状態は

$$B^i_j \left|{}^j_i\right\rangle \tag{11.13}$$

と書くことが出来る．B^i_j は我々が興味のある特定のバリオンをラベルするテンソル (波動関数) である．たとえば陽子状態は

$$B^i_j = \delta_{i1}\,\delta_{j3} \tag{11.14}$$

に対応する．次の行列を書けばすべての状態を一度に調べることができる:

$$B^i_j = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & P \\ \Sigma^- & \frac{-\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & N \\ \Xi^- & \Xi^0 & \frac{-2\Lambda}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}_{ij} \tag{11.15}$$

ここで

$$B^i_j \left|{}^j_i\right\rangle = P|P\rangle + N|N\rangle + \cdots \tag{11.16}$$

この行列の要素は，状態を追跡するための便利なラベルである—— P は陽子の波動関数であり，Λ は Λ 粒子の波動関数であり，等々.

$SU(3)$ が厳密な対称性ならば，**8重項**の全ての粒子は同じ質量を持つ．実際は破れているので，質量は異なる．しかし，Gell-Mann が (11.12) で仮定したように，$SU(3)$ を保存する非常に強い相互作用が，$SU(3)$ を破る中位の強い相互作用よりはるかに重要であるとすれば，表現内での異なる粒子間の質量の違い，**質量分裂**は，平均質量に比べれば小さいはずである．具体的には，質量は粒子状態のエネルギーだから，色んな一粒子状態で挟んだハミルトニアンの行列要素を計算したい．我々は弱い相互作用と電磁相互作用を差し当たり無視する．弱い相互作用は質量には無視できる寄与しかしない．電磁相互作用は，効果は小さいがアイソスピン対称性を破る点で重要であり，もっとおもしろい．この点に関しては後に立ち返る．それで今我々の欲しい行列要素は

$$\langle B|H_{\rm S}|B\rangle = \langle B|H_{\rm VS}|B\rangle + \langle B|H_{\rm MS}|B\rangle \tag{11.17}$$

であるが，ここに，$H_{\rm VS}$ は $SU(3)$ 生成子と交換し，$H_{\rm MS}$ はアイソスピンとハイパーチャージの生成子と交換するが他の生成子とは交換しない．第一項は $SU(3)$ 表現の各粒子に共通の質量を与える．第二項に関して一般には何もあまりおもしろいことは言えない．しかしながら，$H_{\rm MS}$ が $SU(3)$ の 8 重項の第 8 成分のように変換すると信ずる理由がある．実際には，Gell-Mann が最初にその計算をしたとき，彼はこれを信ずる理由を何も持っていなかった．しかし，それは (11.12) で仮定したアイソスピンとハイパーチャージの保存と矛盾しない最も簡単な可能性である．強い相互作用のハミルトニアンがアイソスピンとハイパーチャージ生成子と交換することを知っている，という点がポイントである．それゆえ，それは $I=0$ および $Y=0$ の成分を持つテンソル演算子から成っていな

ければならない．8 表現は $I=Y=0$ の状態を持つ最小の非自明な表現である．$I=Y=0$ 状態は生成子 T_8 に対応する．それで Gell-Mann は，Wigner-Eckart 定理が結果を得るのに使えるように，$H_{\rm MS}$ は 8 表現の T_8 成分として変換すると単に仮定した．すなわち，彼は

$$H_{\rm MS} = [T_8]^i_j\, O^j_i \tag{11.18}$$

とした．O は $SU(3)$ の下で 8 のように変換するテンソル演算子である:

$$\left[T_a,\, O^j_i\right] = O^j_k\,[T_a]^k_i - O^k_i\,[T_a]^j_k \tag{11.19}$$

(11.18) において我々は，$\vec{I}$ と Y と可換な演算子の成分を取り出すためのテンソル成分として行列要素 $[T_8]^i_j$ を使っている．

ここで行列要素

$$\langle B|H_{\rm MS}|B\rangle \tag{11.20}$$

を計算するためにテンソル法が使える．これは我々がすでに行った計算である．二つの独立な，$SU(3)$ 不変なテンソル係数の組み合わせは

$$\begin{aligned}\overline{B}^i_j\,[T_8]^j_k\,B^k_i &= {\rm Tr}\left(B^\dagger\,T_8\,B\right)\\ \overline{B}^i_j\,B^j_k\,[T_8]^k_i &= {\rm Tr}\left(B^\dagger\,B\,T_8\right)\end{aligned} \tag{11.21}$$

である．ここで，行列記法において

$$\overline{B} \to B^\dagger = B^{*T} \tag{11.22}$$

という事実を用いた．これは $\overline{B}$ が，複素共役と，添字の上下交換 (それは転置と等価) を含むからである．

かくして純粋に $SU(3)$ 対称性と $H_{\rm MS}$ が 8 重項の一成分であるという仮定だけから，

$$\begin{aligned}&\langle B|H_{\rm MS}|B\rangle\\ &\quad = X\,{\rm Tr}\left(B^\dagger\,B\,T_8\right) + Y\,{\rm Tr}\left(B^\dagger\,T_8\,B\right)\\ &\quad = X\left([B^\dagger\,B]^1_1 + [B^\dagger\,B]^2_2 - 2[B^\dagger\,B]^3_3\right)/\sqrt{12}\\ &\qquad + Y\left([B\,B^\dagger]^1_1 + [B\,B^\dagger]^2_2 - 2[B\,B^\dagger]^3_3\right)/\sqrt{12}\end{aligned} \tag{11.23}$$

がわかる．それで $B^\dagger B$ および $B B^\dagger$ の対角成分の計算が必要になる．

$$
\begin{aligned}
[B^\dagger B]_{11} &= \left|\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}}\right|^2 + \left|\Sigma^-\right|^2 + \left|\Xi^-\right|^2 \\
[B^\dagger B]_{22} &= \left|\Sigma^+\right|^2 + \left|\frac{-\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}}\right|^2 + \left|\Xi^0\right|^2 \\
[B^\dagger B]_{33} &= |p|^2 + |n|^2 + \left|\frac{-2\Lambda}{\sqrt{6}}\right|^2 \\
[B B^\dagger]_{11} &= \left|\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}}\right|^2 + \left|\Sigma^+\right|^2 + |p|^2 \\
[B B^\dagger]_{22} &= \left|\Sigma^-\right|^2 + \left|\frac{-\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}}\right|^2 + |n|^2 \\
[B B^\dagger]_{33} &= \left|\Xi^-\right|^2 + \left|\Xi^0\right|^2 + \left|\frac{-2\Lambda}{\sqrt{6}}\right|^2
\end{aligned}
\tag{11.24}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\langle B|H_{\mathrm{MS}}|B\rangle = X &\left(|\Sigma|^2 + |\Xi|^2 - |\Lambda|^2 - 2|N|^2\right)/\sqrt{12} \\
&+ Y\left(|\Sigma|^2 + |N|^2 - |\Lambda|^2 - 2|\Xi|^2\right)/\sqrt{12}
\end{aligned}
\tag{11.25}
$$

ここで各アイソスピン多重項内の粒子の種類にわたる和をとっているものと了解する．この式より，各粒子の質量への寄与は，適当なテンソル係数をとり出せば容易に求まる．非常に強い相互作用からくる共通の質量 M_0 を加えて，

$$
\begin{aligned}
M_N &= M_0 - 2X/\sqrt{12} + Y/\sqrt{12} \\
M_\Sigma &= M_0 + X/\sqrt{12} + Y/\sqrt{12} \\
M_\Lambda &= M_0 - X/\sqrt{12} - Y/\sqrt{12} \\
M_\Xi &= M_0 + X/\sqrt{12} - 2Y/\sqrt{12}
\end{aligned}
\tag{11.26}
$$

かくして我々は四つの質量を三つのパラメータで表わしたわけである．対称性は M_0 や X や Y の値について何も教えてくれないが，それらの動力学的な量を消去して，純粋に対称性から従う一つの関係式を得ることができる ——

$$
2(M_N + M_\Xi) = 3M_\Lambda + M_\Sigma \tag{11.27}
$$

これが **Gell-Mann–大久保公式**である．この式はよく成り立っている．例えば，それは

$$
M_\Lambda = \left(2(M_N + M_\Xi) - M_\Sigma\right)/3 \tag{11.28}
$$

を意味しているが，実験値 (MeV 単位)

$$M_N = 940 \qquad M_\Sigma = 1190 \qquad M_\Xi = 1320 \tag{11.29}$$

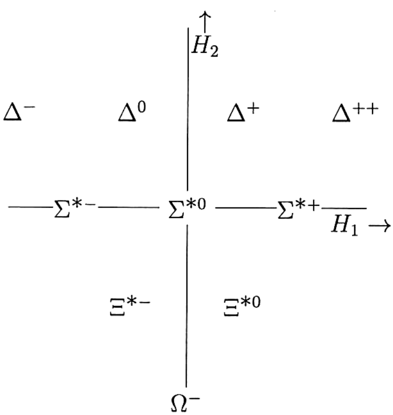
を代入すれば，

$$M_\Lambda = 1110 \qquad (\text{実験値 } 1115) \tag{11.30}$$

を与える．実験値の 1115 と比較すれば，違いは 1% 以下である．アイソスピン対称性の破れがこれ以上であることを考慮すれば，この一致は我々が期待できるいかなる程度よりもずっと良いものである．

11.3 ハドロン共鳴

バリオンやメソンのような強い相互作用をする粒子は，ひっくるめて**ハドロン**と総称される．ここまで議論してきたバリオンとメソンは最も軽いハドロンたちである．ところが，これら軽い状態の励起状態も膨大な数存在し，軽い粒子の衝突で生成されるが，また非常に速く崩壊して軽い状態に戻るので，それらは散乱断面積の高まりとして見えるだけである．最初に発見されるハドロン共鳴は Δ で，それは角運動量 3/2 に対する πP 散乱断面積の 1230 MeV 付近の大変大きな増大として現れた．その共鳴は，+2 から −1 までの全ての電荷状態に現れるので，スピン 3/2，アイソスピン 3/2 の状態である．それは $SU(3)$ の 10 表現の一部である．10 の他の状態も今はすべて観測されている．



(11.31)

Gell-Mann が $SU(3)$ を最初に議論した時，Ω^- は未だ発見されていなかった．Gell-Mann は，その存在のみならず質量も予言することが出来た．ここで彼の計算を再現してみよう．

再び，H_{MS} は 8 重項の 8-成分として変換すると仮定し，

$$\langle B^*|H_{\mathrm{MS}}|B^*\rangle \tag{11.32}$$

を計算する．ただし，ここで 10 重項の波動関数を B^* と呼び，

$$|B^*\rangle = B^{*jk\ell}|_{jk\ell}\rangle \tag{11.33}$$

は，一般の 10 重項状態である．我々はこのテンソル解析をすでにやった．この場合は，少し考えるだけで結果を即座に書き下すことが出来る．既約行列要素は一つしかないので，任意の 8 重項演算子の行列要素は (成分ごとに) 比例する．それゆえ，我々の欲しい行列要素は生成子 T_8 の行列要素に，すなわちハイパーチャージ Y に比例する．これは，アイソスピン多重項たちに対し，等間隔の質量差を予言することを意味する．

$$M_{\Sigma^*} - M_\Delta = M_{\Xi^*} - M_{\Sigma^*} = M_{\Omega^-} - M_{\Xi^*} \tag{11.34}$$

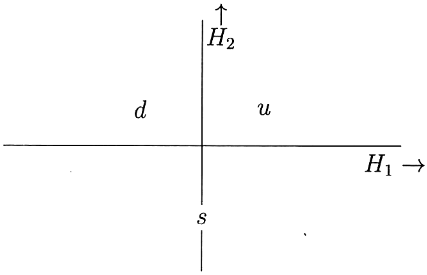
実験的には，MeV 単位で，

$$M_\Delta = 1230 \qquad M_{\Sigma^*} = 1385 \qquad M_{\Xi^*} = 1530 \tag{11.35}$$

間隔はほとんど等しく，その平均は約 150 である．したがって，Ω^- は 1680 くらいであると予想される．Gell-Mann は Ω^- の運命を予想することさえ出来た．予言された質量では，それはストレンジネスとバリオン数を保存してより軽い二粒子に崩壊することは出来ない．バリオン数 1 とストレンジネス -3 を持つより軽い粒子対は，K^- と Ξ^0 (あるいは $\overline{K}^0$ と Ξ^-) で，全質量が約 1815 である．よって Gell-Mann は Ω^- が，共鳴のようではなく，弱く崩壊する (ほとんど安定な) 粒子に見えること，そして，ストレンジネス -2 を持った状態，$\Xi\pi$ や ΛK^-，へ崩壊すること，を予言した．案にたがわず，Ω^- は (最初は泡箱の写真において) 1672 MeV の質量で見つけられた．これは，$SU(3)$ が強い相互作用の良い近似的対称性であることに対する非常に説得力のある証拠となった．

11.4 クォーク

今日，これはかなり自明に思える．何故なら，これら全ての強い相互作用をする粒子は，$SU(3)$ の 3 として変換する三つの軽いクォーク，u，d，s，から出来ていることを知っているからである．



(11.36)

バリオンは三つのクォークから作れる．

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1 \tag{11.37}$$

だからである．これを見るには，先ず，$3 \otimes 3 = 6 \oplus \overline{3}$ に注意し，それゆえ

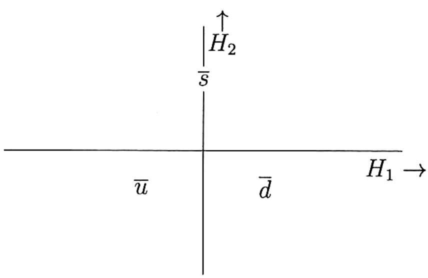
$$3 \otimes 3 \otimes 3 = (6 \otimes 3) \oplus (\overline{3} \otimes 3) \tag{11.38}$$

そして $6 \otimes 3$ は，テンソルでは

$$\begin{aligned} u^{ij}\, v^k = & \frac{1}{3}\left(u^{ij}\, v^k + u^{ik}\, v^j + u^{kj}\, v^i\right) \\ & + \frac{1}{3}\left(\epsilon^{ik\ell}\epsilon_{\ell mn}\, u^{mj}\, v^n + \epsilon^{jk\ell}\epsilon_{\ell mn}\, u^{im}\, v^n\right) \end{aligned} \tag{11.39}$$

のようになるから，これは $10 \oplus 8$ である．よって，我々がすでに見たバリオンの 10 と 8 が共に三つのクォークから作ることができる (1 表現も，もっと高い角運動量状態には現れる)．

対応する反クォークは $\overline{3}$ として変換する．



(11.40)

メソンはクォークと反クォークから出来ている．$3 \otimes \overline{3} = 8 \oplus 1$ だから，これは，我々がすでに見た π，K，η 状態のような 8 重項か，η' のような一重項である．(実際は，中位の強い相互作用のために，η と η' は少し混合する)．

クォークはスピン 1/2 を持ち，後で見るように別の属性，すなわち，強い相互作用の理解にとって本質的なカラーという属性も担っている．また，一つのバリオンを作るのに三つのクォークが必要だから，クォークはバリオン数 1/3 も持つ．u や d クォークは，ストレンジネスが 0 であり，よって，ハイパーチャージ 1/3 を持つ．s クォークは，ストレンジネス -1 を持ち，$Y = -2/3$ である．クォークに対して，電荷は

$$
\begin{aligned}
Q &= T_3 + Y/2 \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{11.41}
$$

である．クォークは，もともと数学的道具，$SU(3)$ 計算をするための簡略記号，として導入された．今日，我々はクォークが現実にあることを知っており，強い相互作用の多くの側面を詳細に理解しているが，それでも，実際計算できないことがたくさんある．対称性の議論に頼らざるを得ないこともしばしばなのである．

私は，ここで，初期の頃からの $SU(3)$ 関係式の例をもう一つやることに抗えない．スピン 1/2 バリオンの 8 重項は，磁気モーメントを持っている．しかしながら，電子の磁気モーメントと異なり，バリオンの磁気モーメントはそれらの質量と量子電気力学だけからは計算できない．それらは，粒子の内部構造に依存している．が，$SU(3)$ を使えば，それらについて多くのことが言える．決定的な観察は，磁気モーメントを記述する演算子が，何であれ，必ずクォークの電荷 Q に比例する，ということである．それゆえ，それは $SU(3)$ 8 重項の演算子の一つであり，我々は，Wigner-Eckart 定理を使うことが出来，次式が期待

される:

$$\mu(B) = \alpha\,\mathrm{Tr}(B\,B^\dagger\,Q) + \beta\,\mathrm{Tr}(B^\dagger\,B\,Q) \tag{11.42}$$

それゆえ，8 個の磁気モーメントの間に 6 個の関係が予言できる．(実際には，9 個目の‘磁気モーメント’がある．それは電磁的崩壊 $\Sigma^0 \to \Lambda\gamma$ を引き起こす，**遷移磁気モーメント**である)．事実，全ての磁気モーメントは，計算結果を $\mu(P)$ と $\mu(N)$ で書き表せる．これらの予言は，1961 年に S. Coleman と S. Glashow により初めて与えられた．

問題

11.A. $SU(3)$ の 6 のように変換する粒子の質量に関して，Gell-Mann-大久保の議論は何を教えるか?

11.B. S 行列に対して $SU(3)$ 対称性を仮定したとき，$\pi^0 P \to \Delta^+$ で Δ^+ が生成される確率と，$K^- P \to \Sigma^{*0}$ で Σ^{*0} が生成される確率とを比較せよ．

11.C. この章で説明した $SU(3)$ の議論を使い，全てのスピン 1/2 バリオンの磁気モーメントを，陽子と中性子のそれ，$\mu(P)$ と $\mu(N)$，で予言する Coleman と Glashow の計算を再現せよ．

第12章

ヤング図形

我々は，対称群の既約表現に関連してヤング図形 (Young tableaux) を議論した．ここでは，それらがリー群の既約表現を扱うのにも役立つことを見る．これを先ず $SU(3)$ に対して議論するが，その本当の利点は，それが $SU(n)$ に一般化されるところにある．

12.1 添字を上げる

鍵となるのは，$\overline{3}$ 表現が二つの 3 表現の反対称な組み合わせであることに気づくことである．それゆえ，高次の表現を構成するのに，二番目の基本表現は実は要らない．任意の表現は適当な対称性を持った 3 表現のテンソル積として書くことが出来る．実際，既に見たように，ヤング図形は置換群の既約表現に対応しており，$SU(3)$ (そして後に見るように，$SU(N)$) の既約表現との関連は，$SU(3)$ の既約表現は添字達のラベルの置換のもとで既約に変換する，という所にある．

一般の表現 (n,m) を考えよう．それは (前の言葉では) 成分

$$A^{i_1\cdots i_n}_{j_1\cdots j_m} \tag{12.1}$$

が，上付き・下付き添字の各々について対称でトレース 0 のテンソルである．下付き添字はすべて ϵ テンソルを用いて上げることができ，次の $n+2m$ 個の上付き添字を持つ量を得る:

$$a^{i_1\cdots i_n k_1\ell_1\cdots k_m\ell_m} = \epsilon^{j_1k_1\ell_1}\cdots\epsilon^{j_mk_m\ell_m}A^{i_1\cdots i_n}_{j_1\cdots j_m} \tag{12.2}$$

明らかに，これは添字の各対 $k_i \leftrightarrow \ell_i$ $(x = 1, \cdots, m)$ に関して反対称で，対の交換 $k_i, \ell_i \leftrightarrow k_j \ell_j$ に関して対称である．

さて，そのようなテンソルの各々に対して，一つのヤング図形を結びつける:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline k_1 & \cdots & k_m & i_1 & \cdots & i_n \\ \hline \ell_1 & \cdots & \ell_m \\ \cline{1-3} \end{array} \tag{12.3}$$

やりたいことは，ヤング図形にテンソル (12.2) の特定の対称性を結びつける規則を見つけることである．それは表現の (n, m) の最高ウェイト状態を考えることで行うことが出来る．降演算子は対称性を保つから，最高ウェイト状態を記述するテンソル成分の対称性がわかれば，全ての状態がその対称性を持つ．最高ウェイト状態は，全ての i 添字が 1 を取り，全ての k, ℓ 対が 1,3 をとる成分たちに対応している．これらの成分は全て，k 添字が皆 1 で，ℓ 添字が皆 3 である一成分から k, ℓ 対達について反対称化することによって得られる．ところが，この一成分は全ての i 添字と k 添字に関する任意の置換のもとで対称で，ℓ 添字達の置換に対しても別途対称である．それゆえ，次のようにすれば正しい対称性を持つテンソルを得ることになる: $n + 2m$ 個の添字を持つ任意のテンソルから出発して，先ず，全ての i 添字と k 添字に関して対称化して，ℓ 添字達に関しても別途対称化する，次に，k, ℓ 添字の各対について反対称化する．ヤング図形の言葉では，これは非常に簡単に言える．先ず，各行の成分について対称化し，次に各列の成分について反対称化する．結果は，(12.2) があるべきように，i 添字達について対称で，k, ℓ 対達について対称である．しかし，(12.2) はトレース 0 に対応する性質も持っている．下付き添字は ϵ テンソルで上げたので，トレース 0 の条件は，

$$\epsilon_{i_1 k_1 \ell_1} \, a^{i_1 \cdots i_n k_1 \ell_1 \cdots k_m \ell_m} = 0 \tag{12.4}$$

となる．これは，ちょうど今述べた対称性を持つテンソルに対しては，各行の添字に関する対称化のために，0 である．

したがって，上の例のようなヤング図形は，特定の既約表現を抜き出すよう，テンソルを対称化するための規則である．例えば，$a^{j_1 j_2 k_1}$ が三つの上付き添字を持つが，特別な対称性を持たない，一般のテンソルとしたとき，ヤング図形

$$\begin{array}{|c|c|}\hline j_1 & j_2 \\ \hline k_1 \\ \cline{1-1} \end{array} \tag{12.5}$$

は，テンソル

$$a^{j_1 j_2 k_1} + a^{j_2 j_1 k_1} - a^{k_1 j_2 j_1} - a^{j_2 k_1 j_1} \tag{12.6}$$

を作る．これは，(1,1) (すなわち随伴) 表現として変換する．

もっと行を増やしてヤング図形を一般化することも出来る．一般的な規則は同じである．箱に添字を入れ，各行の添字に関して対称化し，そして各列の添字に関して反対称化する．

$SU(3)$ の場合，どれかの列に四つ以上の箱を持つヤング図形に対応したテンソルは消える．それは，添字が三つの値しか取れないので，四つ以上の添字について完全反対称なテンソルは存在しないからである．三つの箱を持つ列は，どれもその三つの添字の ϵ 因子に対応する ——

$$\epsilon^{ijk} \quad = \quad \begin{array}{|c|}\hline i \\ \hline j \\ \hline k \\ \hline \end{array} \tag{12.7}$$

したがって

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline & \cdots & & k_1 & \cdots & k_m & i_1 & \cdots & i_n \\ \hline & \cdots & & \ell_1 & \cdots & \ell_m & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-6} & \cdots & & \multicolumn{6}{c}{} \\ \cline{1-3} \end{array} \tag{12.8}$$

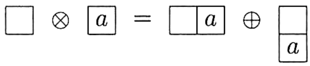
の形の図形は依然として (12.3) と同じ表現を記述する．

12.2　Clebsch-Gordan分解

ここで我々は，証明はしないが，テンソル積のClebsch-Gordan分解に対する算法を与えることができる．ヤング図形 A と B に対応した既約表現 α と β のテンソル積を分解するには，A の上に B の箱を次のように足して図形を構成する．先ず，図形 B の第一行目の全ての箱に a を書き，第二行目の全ての箱に b を書く．B の第一行目から箱をとり，それらを A に，右側あるいは下側へ，二つの a が同じ列に来ないよう，かつ，正当な図形になるようくっつける (正当な図形とは，各行の箱の数が下に行ったときに増えず，各列の箱の数も右へ行ったときに増えない，箱の集まりである)．次に第二行目の箱をとり，上で出来た図形のそれぞれに対し，二つの b が同じ列に来ないように，正当な図形になるように，くっつける．ここで一つのさらなる制限がつく．(出来た図形を) 各行に

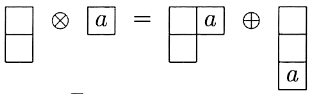
沿って右から左へ，上の行から下の行へ読んで行くとき，どの時点でも a の個数が b の個数より多いか等しくなければならない．これでダブルカウントを避けられる．この構成法で出来た図形が，$\alpha \otimes \beta$ に含まれる既約表現に対応する．

例:



(12.9)

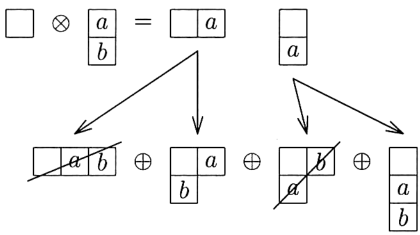
$$3 \otimes 3 = 6 \oplus \overline{3}$$



(12.10)

$$\overline{3} \otimes 3 = 8 \oplus 1$$

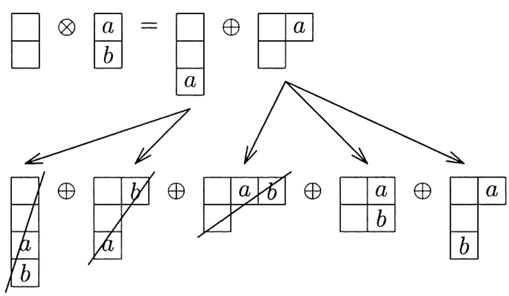
この例を，掛け算を逆順にしてやってみれば，もう少し自明でない．



(12.11)

斜線を付けて消した図形は，a の個数が b の個数より多いか等しいという上の制限を満たさない．言うまでもないが，元の順でやった方が，動かす箱の数が少ないので，易しい．

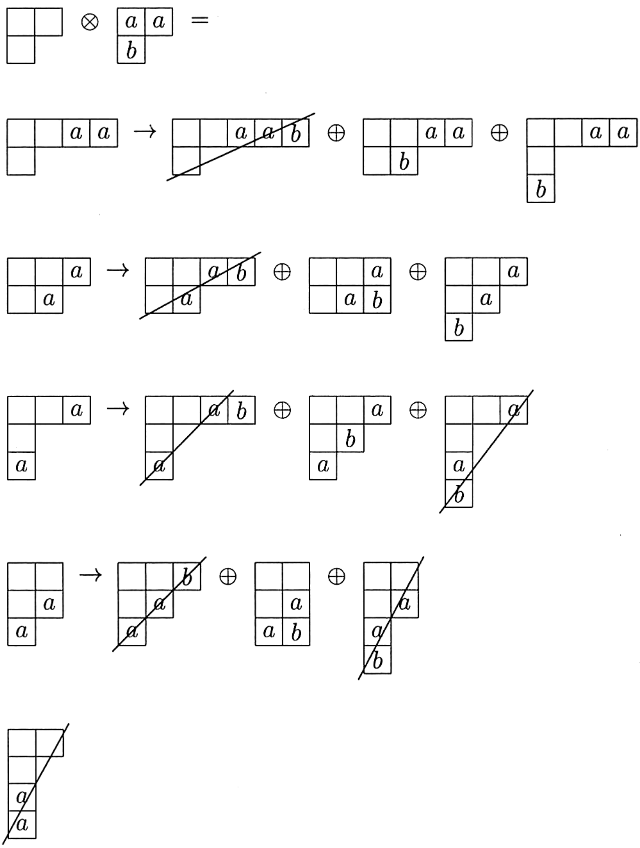
第一段階で作られた図形が，第二段階で条件を満たす図が全然作れず役に立たない，ということもある．例を示そう:



(12.12)

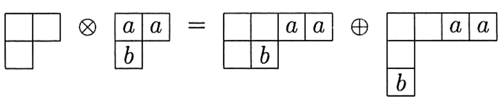
もちろん，実際にはこの例は決してこのようにはやらないだろう．これは$\overline{3} \otimes \overline{3} = \overline{6} \oplus 3$の分解である．これは単に，我々が既にやった$3 \otimes 3 = 6 \oplus \overline{3}$の複素共役である．後者の方が含まれる箱の数が少ないので易しかった．これは有用な教訓である．

最後に，全てのルールを例示する有用な例を一つ示そう —— $8 \otimes 8$

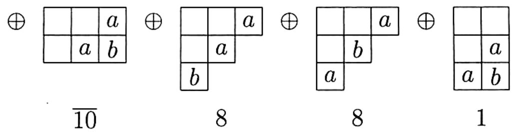


(12.13)

すなわち，



27　　　10



(12.14)

この解析は，ルールの全てを例示しているだけではなく，計算をやる順序に対して一つの可能な系統的やり方を提示している．この場合，初めには箱を出来る限り右側へ置いていき，次に左へ動いていく．全ての可能性を見落とさないためには，各自が何らかのそのようなルールを持っていることが肝要である．

12.3　$SU(3) \to SU(2) \times U(1)$

ヤング図形は他にも多くのことに有用である．$SU(3)$ において既に我々が調べられることとして，$SU(3)$ の一つの表現が，その部分群の表現にどう分解するのかを教えてくれる，ということがある．何らかの現象論的重要性を持つこれの一つの例は，$SU(3)$ の表現が，部分群 $SU(2) \times U(1)$ の，特に，アイソスピンとハイパーチャージ (T_8 はちょうど $\sqrt{3}Y/2$ であることを思い出せ) の表現へどう分解するか，である．

定義表現 3 の三つの成分は，ハイパーチャージ 1/3 を持つ (アイソスピン)2 重項と，ハイパーチャージ $-2/3$ を持つ一重項とに分解する．一般に，n 個の箱を持つヤング図形を考え，j 個の添字が 2 重項として，$n-j$ 個の添字が一重項として変換するような成分を考えよう．その全ハイパーチャージは

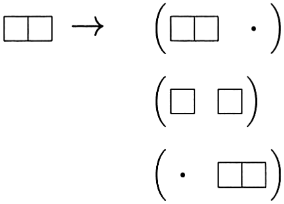
$$\frac{j}{3} - \frac{2(n-j)}{3} = -\frac{2n}{3} + j \tag{12.15}$$

である．$n{-}j$ 個の一重項成分を一行に $n{-}j$ 個の箱を持つヤング図形で表示しよう．これはこれらに対して作ることのできる唯一の可能なヤング図形である．何故なら，それらは全て同じ添字 (値) を持っており，それゆえ同じ列には現れ得ないからである．

これらの成分が属する $SU(2)$ 表現は，j 個の箱から作れる表現のある部分集合である．さてこれからがポイントである．ある与えられた $SU(2)$ 表現 α が実際現れるかどうかを決定するため，我々のやることは，α と $n{-}j$ 個の水平並びの箱とのテンソル積を計算することである．そうすれば，$SU(3)$ の元の表現がそのテンソル積に現れる回数は，α が分解に現れる回数である．この手続きの

正当化は，後に我々がそれを一般化するときに，与える．ここではいくつかの例をやってみる．我々は，$SU(2)$ の表現をその次元で書き，ハイパーチャージの値を添字として加える記法を使う．それゆえ，$(2I+1)_y$ はハイパーチャージ y を持つアイソスピン I の表現を表す．

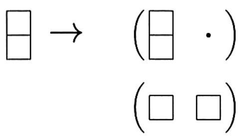
先ず 6 を考える．結果は次の図で説明される (ここで • は，箱がない自明な図形を表す)．



$$3_{2/3} \quad 2_{-1/3} \quad 1_{-4/3} \tag{12.16}$$

各表現は一度ずつ現れる．

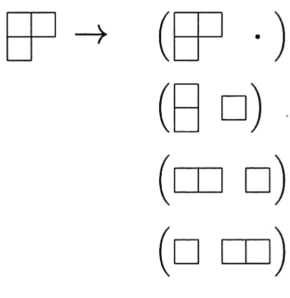
次に $\bar{3}$ を見てみよう．これは 3 の複素共役であるから，この場合の答えは明らかである．しかし，この言葉でそれがどのように見えるのか見てみよう．



$$1_{2/3} \quad 2_{-1/3} \tag{12.17}$$

再び，各表現は一度ずつ現れる．順序づけられた対の右側には，列並びの箱はないことに注意しよう．それは，一つの値しかない添字の反対称な組み合わせを意味し，消えてしまうからである．

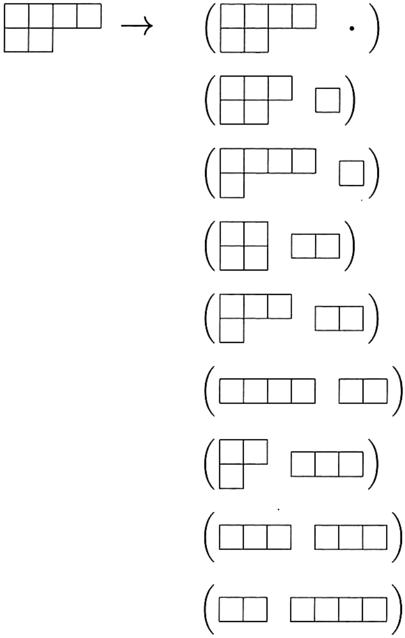
次に (我々はその答えを既に知っているが) 随伴表現を考えよう．



$$2_1 \quad 1_0 \quad 3_0 \quad 2_{-1} \tag{12.18}$$

各表現は一回ずつ現れる．

ここでもっと自明でない例，27 表現に対してやってみよう ——



3_2

2_1

4_1

1_0

3_0 (12.19)

5_0

2_{-1}

4_{-1}

3_{-2}

再び，各表現は一回ずつ現れる．

問題

12.A. $(2,1) \otimes (2,1)$ を求めよ．このテンソル積の中で，どの表現が反対称な積で，どの表現が対称な積で現れるのか，決定せよ．

12.B. $10 \otimes 8$ を求めよ．

12.C. 任意のリー群に対し，随伴表現と任意の自明でない表現 D とのテンソル積は，必ず D を含む (D の状態に対する生成子の作用について考えて，これが成り立つ理由を見つけ出せ)．特に，自明でない任意の $SU(3)$ 表現 D に対しても，$D \otimes 8$ は D を含まねばならない．ヤング図形を使えばこれがどのように理解できるか?

第13章

$SU(N)$

我々は，ここまでの数章の議論を，エルミートなトレース0の $N \times N$ 行列で生成される，特殊ユニタリー $N \times N$ 行列の群 $SU(N)$ に一般化したい．

13.1 一般化 Gell-Mann 行列

$SU(N)$ 生成子に対しては，二つの異なる有用な基底の採り方がある．先ず，Gell-Mann 行列を一般化する方から始めよう．$SU(N)$ 生成子から $SU(N+1)$ 生成子へと一歩ずつ構成してゆく．規格化は ($SU(2)$ や $SU(3)$ の時と同じく)

$$\mathrm{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2}\,\delta_{ab} \tag{13.1}$$

を採る．昇降演算子の生成子は，ゼロでない行列要素としてただ1箇所だけ非対角要素に $1/\sqrt{2}$ を持つものを採る．独立なトレース0の対角実行列は $N-1$ 個あるので，$SU(N)$ 群はランク $N-1$ である．$N-1$ 個の Cartan 生成子は，次のものを選ぶことが出来る:

$$[H_m]_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2m(m+1)}}\left(\sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}\delta_{jk} - m\,\delta_{i,m+1}\,\delta_{j,m+1}\right) \tag{13.2}$$

あからさまに書けば，

$$H_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad H_2 = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$H_3 = \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{13.3}$$

などなど.

全部で N^2-1 個の独立なトレース 0 のエルミート行列がある. これら N^2-1 個の行列が, $SU(N)$ の (N とも表記される) N 次元定義表現において働く生成子を与える. 定義表現におけるウェイトは, $N-1$ 次元ベクトル

$$[\nu^j]_m = [H_m]_{jj} = \frac{1}{\sqrt{2m(m+1)}} \left(\sum_{k=1}^{m} \delta_{jk} - m\, \delta_{j,m+1} \right) \tag{13.4}$$

$(j = 1, \cdots, N)$ である[1]. これらは,

$$\begin{aligned} \left|\nu^j\right|^2 &= \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{2m(m+1)} \left(\sum_{k=1}^{m} \delta_{jk} - m\, \delta_{j,m+1} \right)^2 \\ &= \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{2m(m+1)} \left(\sum_{k=1}^{m} \delta_{jk} + m^2\, \delta_{j,m+1} \right) \\ &= \sum_{m=j}^{N-1} \frac{1}{2m(m+1)} + \frac{(j-1)^2}{2j(j-1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=j}^{N-1} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{(m+1)} \right) + \frac{(j-1)}{2j} \\ &= \frac{1}{2j} - \frac{1}{2N} + \frac{j-1}{2j} = \frac{N-1}{2N} \end{aligned} \tag{13.5}$$

を満たし, $i < j$ に対して次の内積を持つ:

$$\begin{aligned} \nu^i \cdot \nu^j &= \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{2m(m+1)} \left(\sum_{k=1}^{m} \delta_{ik} - \cancel{m\, \delta_{i,m+1}} \right) \left(\sum_{k=1}^{m} \delta_{jk} - m\, \delta_{j,m+1} \right) \\ &= \sum_{m=j}^{N-1} \frac{1}{2m(m+1)} - \frac{(j-1)}{2j(j-1)} \\ &= \frac{1}{2j} - \frac{1}{2N} - \frac{1}{2j} = -\frac{1}{2N} \end{aligned} \tag{13.6}$$

ウェイトたちは皆同じ長さを持ち, 異なる二つのウェイトの間の角度はどれも等

[1] (訳者注) ウェイト ν^j に対応する固有ベクトルは, j 番目の単位ベクトル.

しい ——

$$\left|\nu^i\right|^2 = \frac{N-1}{2N} \qquad \nu^i \cdot \nu^j = -\frac{1}{2N} \ \text{ for } \ i \neq j \tag{13.7}$$

すなわち

$$\nu^i \cdot \nu^j = -\frac{1}{2N} + \frac{1}{2}\,\delta_{ij} \tag{13.8}$$

したがって，これらのウェイトは $N-1$ 次元空間で正則な形，$N-1$-単体(simplex)，を成している．

ウェイトは，あからさまに書けば，次のようになる:

$$\begin{aligned}
\nu^1 &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{2m(m+1)}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{2(N-1)N}}\right) \\
\nu^2 &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{2m(m+1)}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{2(N-1)N}}\right) \\
\nu^3 &= \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{2m(m+1)}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{2(N-1)N}}\right) \\
&\cdots \\
\nu^{m+1} &= \left(0, 0, \cdots, -\frac{m}{\sqrt{2m(m+1)}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{2(N-1)N}}\right) \\
&\cdots \\
\nu^N &= \left(0, 0, \cdots, 0, \cdots, -\frac{N-1}{\sqrt{2(N-1)N}}\right)
\end{aligned} \tag{13.9}$$

便宜のために，正値性に対し逆向きの規約を採ろう —— **最後**の 0 でない成分が正であるウェイトを，正のウェイトと呼ぶ．この定義で，先のウェイトは次の順番となる:

$$\nu^1 > \nu^2 \cdots > \nu^{N-1} > \nu^N \tag{13.10}$$

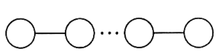
生成子 E は一つのウェイトを他のウェイトに移すので，ルートはウェイトの差 $\nu^i - \nu^j$ $(i \neq j)$ である．正のルートは $\nu^i - \nu^j$ $(i < j)$ であり，単純ルートは，

$$\alpha^i = \nu^i - \nu^{i+1} \quad (\, i = 1, \cdots, N-1) \tag{13.11}$$

である．これらのルートは皆長さ 1 である．それらは，(13.8) を用いて

$$\alpha^i \cdot \alpha^j = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1} + \delta_{i+1,j+1}\right) = \delta_{ij} - \frac{1}{2}\,\delta_{i,j\pm 1} \tag{13.12}$$

を満たし，よって Dynkin 図は次のようになる:



α^1　α^2　α^{N-2}　α^{N-1}　(13.13)

基本ウェイトは

$$\mu^j = \sum_{k=1}^{j} \nu^k \tag{13.14}$$

である．実際，(13.7) を使えば，これらが，

$$\frac{2\alpha^i \cdot \mu^j}{\alpha^{i2}} = \delta_{ij} \tag{13.15}$$

を満たすことを容易に確かめられる．(13.8) 式の $\frac{1}{2N}$ に比例する項は，単純ルートがウェイト ν^j の差で与えられるのでキャンセルしているからである．かくして，μ^1 は定義表現の最高ウェイトであることがわかる．

13.2 $SU(N)$ テンソル

$SU(3)$ の場合と同様，状態にテンソルを結びつけることが出来，

$$|\nu^i\rangle \to |_i\rangle \tag{13.16}$$

そうすることで，任意の表現をテンソル積として作ることができる．

例として，m 個の定義表現の完全反対称な組み合わせを考えよう．その状態は，完全反対称な $A^{[i_1\cdots i_m]}$ を用いて

$$A^{[i_1\cdots i_m]}|_{i_1\cdots i_m}\rangle \tag{13.17}$$

と書ける．この状態の組は，その反対称性のため，既約表現を与える．反対称性により，どの二つの添字も同じ値を取れない．だから，その状態の組の中で最高ウェイトは，一つの添字が 1 で，別のが 2 で，等々，の時に実現される．これは，最高ウェイトが基本ウェイト μ^m

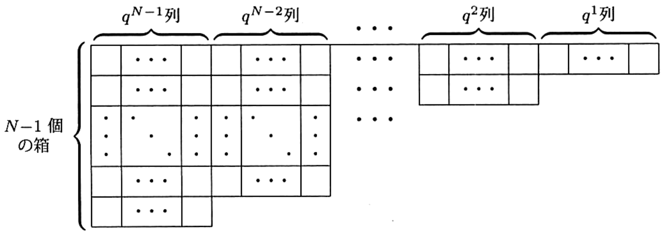
$$\sum_{k=1}^{m} \nu^k = \mu^m \tag{13.18}$$

であることを意味している．よってこの表現は，基本表現 D^m である．

任意の既約表現の最高ウェイトは，Dynkin 係数 q^k を用いて，

$$\mu = \sum_k q^k \mu^k \tag{13.19}$$

のように書ける．q^k は，非負の整数である．この表現に対応するテンソルは1から $N-1$ の間の各 k に対し，反対称な k 個の添字の組を q^k セット，持っている．$SU(3)$ の場合の議論の簡単な一般化により，このテンソルは，k 個の箱の列を q^k 列持つ，次のヤング図形から得られることがわかる．



(13.20)

これは，$SU(3)$ の場合にそうであったのと同じ理由で，正しい形のテンソルを与える．最高ウェイトの状態は，第一行が全て1であり，第2行が全て2で，第3行が全て3，等々となる項を持っている．それゆえ，我々の欲しいテンソルは，先ず各行の添字に関して対称化し，次に各列の添字に関して反対称化して，得られる．これはまさに，第1章の終わりで置換群の既約表現を構成するために我々が使った対称化条件である．かくして，m 個の添字を持った $SU(N)$ の既約表現は，S_m の既約表現と結びつけられることになる．

$SU(3)$ の場合のように，$N+1$ 個以上の箱の列を持つ図形は恒等的に消える．N 個の箱を持つ列は，(再び ϵ と呼ぶ) N 個の添字を持つ完全反対称テンソル因子ひとつ分の寄与をする．N 個の箱を持つ列以外が同じである図形は，同じ既約表現に対応する．

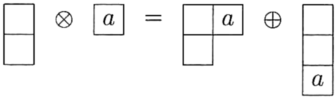
我々は，あるヤング図形に対応する表現を，その図形の各**列**の箱の数，すなわち，$[\ell_1, \ell_2, \cdots]$ のような非増加の数列，によって表示することもある．この記法では，基本表現 D^j は $[j]$ である．

例えば，$SU(N)$ における随伴表現は，$SU(3)$ の場合のように，一つの上付き添字と一つの下付き添字を持ったテンソルに対応する．それを標準的な形のテンソルにするには，その下付きの添字を，N 個の添字の ϵ テンソルで上げなければならない．したがって随伴表現は $[N-1, 1]$ である．

Clebsch-Gordan 分解は，$SU(3)$ の場合と同じように出来る．この場合，三行目に c，四行目に d，等々，が必要になり，各行に沿って右から左へ，上の行から下の行へ読んでいったときに，どの時点でも，a の個数が b の個数より多いか

等しく，b の個数は c の個数より多いか等しく，等々，でなければならない，という条件，になる．

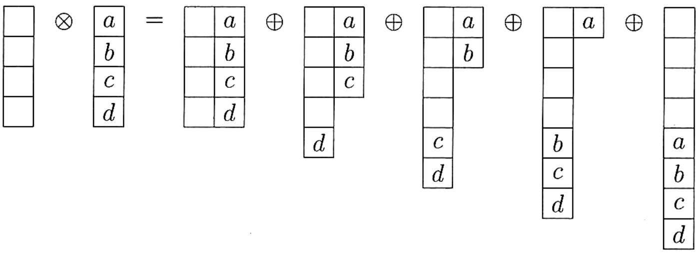
例えば，



(13.21)

$$[2] \quad \otimes \quad [1] \quad = \quad [2,1] \quad \oplus \quad [3]$$

あるいは



(13.22)

$$[4] \quad \otimes \quad [4] \quad = \quad [4,4] \quad \oplus \quad [5,3] \quad \oplus \quad [6,2] \quad \oplus \quad [7,1] \quad \oplus \quad [8]$$

これらのどの表現も一回以上現れないようにしているのは，a の個数が b の個数より多いか等しいうんぬんという規則であることに注意したい．また，N が 8 より少なければ，もちろん，最後の例の中の図形のいくつかは消えており，N 個の箱の列は，表現を変えることなしに消すことが出来る．

一般に，Clebsch-Gordan 分解の過程において，箱が消えることができるのは，N 個の箱の列が取り除かれる場合だけである，ことに注意しよう．したがって，「j 個の箱を持つ図形 $\otimes k$ 個の箱を持つ図形」の分解において，各図形は N を法として $j+k$ 個の箱を持つ．これは，$SU(3)$ の場合の**トライアリティ**の保存則に対応する性質である．$SU(N)$ における量 $j+k \pmod N$ は，洗練されない言葉だが ***N*-アリティ**と記されることもある．

13.3 次元

我々が必要とするような小さな表現に対しては，たいてい，次元を数えるのは容易である．例えば，$[j]$ の次元は

$$\binom{N}{j} = \frac{N!}{j!(N-j)!} \tag{13.23}$$

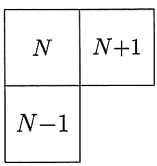
である．二つの列を持つ表現の次元も，Clebsch-Gordan の展開を用いれば計算できる．例えば，$[2] \otimes [1] = [2,1] \oplus [3]$ から，[2,1] の次元がわかる:

$$\binom{N}{2} \times \binom{N}{1} - \binom{N}{3} = \frac{N(N+1)(N-1)}{3} \tag{13.24}$$

しかし実は，任意の表現の次元をそのヤング図形から計算する簡単な規則がある．それは **factors over hooks 規則**と呼ばれるもので，Weyl の指標公式の特殊な場合に相当する．それは次のようにやる．ヤング図形の左上スミの箱に N を入れる．ついで，他のすべての箱にも，下にさがる時には1ずつ減らし，右へ行く時には1ずつ増やした整数 (ファクター) を入れる．これらすべてのファクターの積を F と呼ぶ．フックとは，ある列の底から鉛直に箱に沿って昇ってゆき，ある箱で右折してその行の箱を横切ってゆく，かぎ形の線をいう．各箱に対し (そこを右折の角とする) フックが一つある．このフックが通過する箱の数を h と呼び，全てのフックに対する h を掛け合わせたものを H と呼ぶ ((1.164) で我々が使ったものと同じ因子である)．そうすると，その表現の次元は

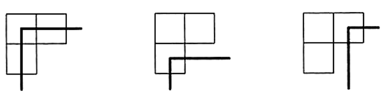
$$F/H \tag{13.25}$$

である．例えば，[2,1] に対し，ファクターは



$$F = N(N+1)(N-1) \tag{13.26}$$

である．フックは



$h=3$　　$h=1$　　$h=1$　　(13.27)

となり，$H=3$ である．したがって，次元は

$$\frac{F}{H} = \frac{N(N+1)(N-1)}{3} \tag{13.28}$$

となり，(13.24) と一致している．

13.4　複素表現

たいていの $SU(N)$ の表現は複素表現である．例えば，定義表現の最低ウェイトは ν^N である．ところが，Cartan 生成子が皆トレース 0 であることから

$$\sum_{j=1}^{N} \nu^j = 0 \tag{13.29}$$

が従い，それゆえ

$$\nu^N = -\sum_{j=1}^{N-1} \nu^j = -\mu^{N-1} \tag{13.30}$$

したがって [1] は複素であり，その複素共役は D^{N-1}，すなわち $[N-1]$ である:

$$\overline{[1]} = [N-1] \tag{13.31}$$

同様に，$[m]$ の最低ウェイトは m 個の最も小さい ν^i たちの和

$$\sum_{j=N-m+1}^{N} \nu^j = -\sum_{j=1}^{N-m} \nu^j = -\mu^{N-m} \tag{13.32}$$

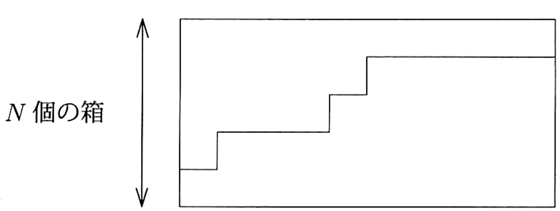
であるから，

$$\overline{[m]} = [N-m] \tag{13.33}$$

一般に，一つの表現の複素共役は

$$\overline{[\ell_1, \cdots, \ell_n]} = [N-\ell_n, \cdots, N-\ell_1] \tag{13.34}$$

したがって，一つの表現とその複素共役表現のそれぞれに対応するヤング図形は，下に示すように，互いにぴったり組み合わさり，N 個の箱の高さの長方形になる:



(13.35)

13.5 $SU(N) \otimes SU(M) \in SU(N+M)$

前章での $SU(2) \times U(1) \in SU(3)$ の議論を今や一般化することができる．$SU(N+M)$ の部分群 $SU(N) \otimes SU(M) \otimes U(1)$ を考えよう．ただし，この $SU(N)$ は最初の N 個の添字に作用し，$SU(M)$ は最後の M 個の添字に作用するものである．この二つの部分群は，一つの $U(1)$ 群，最初の N 個の添字の上で M，最後の M 個の添字の上で $-N$ となる (トレース 0 に注意) 生成子を持つ $U(1)$ 群，と交換する．

$$\square = (\,\square \quad \cdot\,)_M \oplus (\,\cdot \quad \square\,)_{-N} \tag{13.36}$$

われわれは，$SU(N+M)$ の任意の既約表現が，$SU(N) \otimes SU(M) \otimes U(1)$ の既約表現にどう分解するのかを決定したい．$n+m$ 個の箱を持つ $SU(N+M)$ の表現があったとしよう．n 個の添字を 1 から N の値に，m 個の添字を $N+1$ から $N+M$ の値に制限したとき，n 個の箱を持つ $SU(N)$ の表現 A と m 個の箱を持つ $SU(M)$ の表現 B の積がその $SU(N+M)$ 表現の中に現れる回数を計算するために，その条件をゆるめ，全ての添字が $N+M$ 個の値を走れるようにして，($SU(N+M)$ の表現としての) テンソル積 $A \otimes B$ を求める．そうすれば，対 (A,B) がその分解に現れる回数は，元の $SU(N+M)$ 表現がテンソル積 $A \otimes B$ に現れる回数に等しい．その表現の $U(1)$ 電荷が $nM - mN$ であることにも注意せよ．

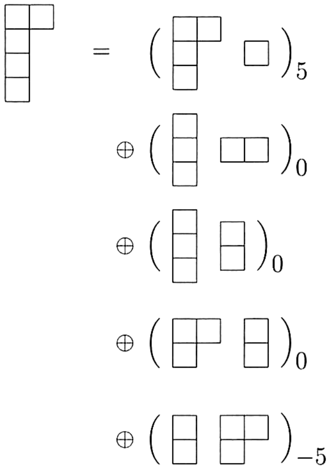
もし $M = 1$ と取れば，$SU(1)$ なる代数は無い (生成子を持たない) ので，$SU(M)$ 群は消えることに注意しよう．しかし上で述べた構成は依然として働く．これは，前の章で我々が (12.18) と (12.19) において $SU(3)$ の表現をその $SU(2) \times U(1)$ 部分群のもとで分解するために使ったものである．

例として $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1) \in SU(5)$ をやってみよう．その場合の定義表現は

$$\begin{aligned} \square \quad &= \quad (\,\square \quad \cdot\,)_2 \qquad (3,1)_2 \\ &\oplus \quad (\,\cdot \quad \square\,)_{-3} \qquad (1,2)_{-3} \end{aligned} \tag{13.37}$$

次に，上で $[N-1,1]$ であることを説明した随伴表現は，

(13.38)



$(3,2)_5$

$(1,3)_0$

$(1,1)_0$

$(8,1)_0$

$(\overline{3},2)_{-5}$

問題

13.A. $SU(n)$ 代数が $SU(n-1)$ 部分代数を含むことを示せ．$SU(n)$ の基本表現たちはそれぞれどのような $SU(n-1)$ の表現に分解するか?

13.B. $SU(5)$ において [3]⊗[1] を求めよ．次元勘定がうまくいっていることを確かめよ．

13.C. [3,1]⊗[2,1] を求めよ．

13.D. 部分代数 $SU(N) \otimes SU(M) \otimes U(1) \in SU(N+M)$ のもとで，$SU(N+M)$ の基本表現たちはどのように変換するか? また，随伴表現はどうか? ただし，この部分代数は，$SU(N+M)$ の定義表現 $N+M$ が $([1],[0])_M \oplus ([0],[1])_{-N}$ のように変換するものである (初めの括弧は $SU(N)$ 表現を，二番目の括弧は $SU(M)$ の表現を表す).

13.E. $SU(N)$ において $[2] \otimes [1,1]$ を求めよ．factors over hooks 規則を用いて，任意の N に対し次元勘定がうまくいっていることを確かめよ．

第 14 章

3 次元調和振動子

この章は重要である．しかし，3 次元調和振動子が特に物理的に重要だという理由ではない．そうではないが，それは $SU(N)$ 対称性が量子力学においてどのように現れるのかを示してくれる美しい実例なのである．

14.1　昇降演算子

ハミルトニアンは，(ここでも他と同じように $\hbar = 1$ とおいた)

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m}\vec{p}^{\,2} + \frac{m\omega^2}{2}\vec{r}^{\,2} \\ &= \omega\left(a_k^\dagger a_k + 3/2\right) \end{aligned} \tag{14.1}$$

ただし

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\left(m\omega\, r_k + i\, p_k\right) \\ a_k^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\left(m\omega\, r_k - i\, p_k\right) \end{aligned} \tag{14.2}$$

($k = 1, \cdots, 3$).　a_k と $a_k^\dagger$ はボソンの消滅・生成演算子の交換関係を満たす，昇降演算子である:

$$\begin{aligned} &\left[a_k,\, a_\ell^\dagger\right] = \delta_{k\ell} \\ &\left[a_k,\, a_\ell\right] = \left[a_k^\dagger,\, a_\ell^\dagger\right] = 0 \\ &\left[a_k^\dagger a_k,\, a_\ell^\dagger\right] = a_\ell^\dagger \\ &\left[a_k^\dagger a_k,\, a_\ell\right] = -a_\ell \end{aligned} \tag{14.3}$$

$|0\rangle$ を

$$a_k|0\rangle = 0 \tag{14.4}$$

を満たす基底状態とすれば，エネルギー固有状態は

$$a_{k_1}^\dagger \cdots a_{k_n}^\dagger |0\rangle \tag{14.5}$$

で与えられ，そのエネルギー固有値は

$$\omega\,(n + 3/2) \tag{14.6}$$

この固有値の縮退度はおもしろい —— それは n 個の添字 $k_1 \cdots k_n$ の対称な組み合わせの数

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} \tag{14.7}$$

である．これはちょうど $SU(3)$ の $(n,0)$ 表現の次元に等しい．これはこのモデルが $SU(3)$ 対称性を持っていることを示唆している．

この$SU(3)$ をあらわに見つけることは難しくない．というのも，昇・降演算子は数学的にはボソンの生成・消滅演算子と全く相似だからである．しかも我々は生成・消滅演算子から $SU(3)$ 生成子をどう作るのかを知っている．この推測は正しいことがわかる．ヒルベルト空間上の $SU(3)$ 対称性の生成子は，$T_a = \lambda_a/2$ を Gell-Mann 行列として

$$Q_a = a_k^\dagger\,[T_a]_{k\ell}\,a_\ell \tag{14.8}$$

で与えられる．これらが $SU(3)$ の交換関係を満たすことは既に問題 (5.B) で示した．そして

$$[Q_a,\,H] = 0 \tag{14.9}$$

もチェックできるので，エネルギー固有状態は $SU(3)$ 表現をなしている．また，

$$Q_a|0\rangle = 0 \tag{14.10}$$

だから，基底状態は $SU(3)$ 一重項である．

生成・消滅演算子と全く同様，昇・降演算子は $SU(3)$ の下でのテンソル演算子をなし，

$$\left[Q_a,\,a_k^\dagger\right] = a_\ell^\dagger\,[T_a]_{\ell k} \tag{14.11}$$

よって，$a_k^\dagger$ は 3 として変換する．降演算子 a_k は，$\overline{3}$ のように変換する．

$$[Q_a,\, a_k] = -[T_a]_{k\ell}\, a_\ell$$
$$= -a_\ell\, [T_a^T]_{\ell k} = -a_\ell\, [T_a^*]_{\ell k} \qquad (14.12)$$

ヒルベルト空間のすべての状態は $|0\rangle$ に昇演算子を作用させて得られるから，ヒルベルト空間は $(n, 0)$ 表現に分解するのである．他の表現は全く現れない．

14.2　角運動量

ここで何かおもしろいことが起こっている．$SU(3)$ 対称性は自明ではない．それは，異なる角運動量を持つ状態が厳密に縮退していることを意味している．角運動量は，

$$L_3 = 2Q_2\,, \quad L_1 = 2Q_7\,, \quad L_2 = -2Q_5 \qquad (14.13)$$

で生成される $SU(3)$ の部分群である (問題 14.C 参照)．ところが，$n > 1$ の時は，レベル n の状態は二個以上の値の角運動量を含んでいる．例えば，$n = 2$ の状態は $SU(3)$ の 6 表現として変換し，角運動量の下では $5 + 1$ として変換する．よってこのレベルにおいて，$SU(3)$ 対称性は回転対称性だけからは言えない縮退を保証している．しかし，注意したいのは，この $SU(3)$ 対称性は，何も課する必要がなかったということである．我々は回転不変性は要求した，そうすると，調和振動子の力の線形性から $SU(3)$ 対称性が突然現れてきたのである．非線形の，非調和効果があれば，$SU(3)$ 対称性は壊れただろう．例えば，ポテンシャルに $(\vec{x}^2)^2$ のような項があると，角運動量は保存するが，$SU(3)$ は破れる．

次元数を大きくしたり小さくしたりすれば，この例は $SU(N)$ に拡張することができる．次元は，この場合，単に昇・降演算子に，より多くの添字 (の値) を与えるだけである．我々は 3 次元に住んでいるので，調和振動子に対しては，これはかなり馬鹿げたことのように思える．しかし，相対論的な理論においてハミルトニアンを生成・消滅演算子で記述しようとする場合，それは全く自然なことである．同じ質量を持っているが N 個の異なる種類の粒子の系に対するハミルトニアンの第一近似は，全粒子数 $\sum_{k=1}^{N} a_k^\dagger a_k$ に比例する．これは単に m 個の粒子状態のエネルギーが一粒子状態のエネルギーの m 倍であるからである．このハミルトニアンは $SU(N)$ 対称性を持っている．もちろん，粒子の違いを識別する相互作用やその他の効果はその対称性を破る．

14.3 より複雑な例

$SU(3)$ のすべての表現がヒルベルト空間に現われる，もう少し複雑な模型を考察することは大変教育的である．次の二粒子系のハミルトニアンを考えよう:

$$\begin{aligned} H &= \frac{\omega_1}{2}\left(\vec{p}^2+\vec{r}^2\right)+\frac{\omega_2}{2}\left(\vec{P}^2+\vec{R}^2\right) \\ &+\Delta\left[(\vec{r}\cdot\vec{R}-\vec{p}\cdot\vec{P})^2+(\vec{r}\cdot\vec{P}+\vec{R}\cdot\vec{p})^2\right. \\ &\left.-\vec{r}^2-\vec{p}^2-\vec{R}^2-\vec{P}^2\right] \end{aligned} \tag{14.14}$$

ここで $\vec{R}$ と $\vec{P}$ は独立な座標と運動量の組である．これは，一見かなり複雑な形で結合した，$m_1\omega_1=m_2\omega_2=1$ を単位とする二つの調和振動子を記述している．しかし実際はそれは昇・降演算子で書けば簡単になるよう注意深く構成したものである．

$$\begin{aligned} \vec{a}^\dagger &= (\vec{r}-i\vec{p})/\sqrt{2}\,, \qquad \vec{a}=(\vec{r}+i\vec{p})/\sqrt{2}\,, \\ \vec{b}^\dagger &= (\vec{R}-i\vec{P})/\sqrt{2}\,, \qquad \vec{b}=(\vec{R}+i\vec{P})/\sqrt{2} \end{aligned} \tag{14.15}$$

を定義すれば，ハミルトニアンは次のようになる．

$$\begin{aligned} H &= \omega_1(a_k^\dagger a_k+3/2)+\omega_2(b_k^\dagger b_k+3/2) \\ &+4\Delta\,(a_k^\dagger b_k^\dagger)\,(a_\ell b_\ell) \end{aligned} \tag{14.16}$$

ここのポイントは，Δ に比例した相互作用項の形，特に，昇・降演算子の添字の縮約の仕方，である．それは，演算子

$$Q_\alpha = a_k^\dagger\,[T_\alpha]_{k\ell}\,a_\ell - b_k^\dagger\,[T_\alpha^*]_{k\ell}\,b_\ell \tag{14.17}$$

と交換するように作られている (問題 14.D 参照)．これらの演算子は $SU(3)$ の交換関係を持ち，それゆえ理論は $a^\dagger$ が 3 として変換する $SU(3)$ 対称性を持つ．これは単純な 3 次元調和振動子と同じであるが，ここでは $\overline{3}$ として変換する $b^\dagger$ も含まれる．3 だけでなく $\overline{3}$ として変換する昇演算子があるので，任意の $SU(3)$ 表現として変換する状態を作ることができる．

状態がどのようなものになるかを見るため，H もまた個数演算子

$$N_a = a_k^\dagger a_k \quad \text{と} \quad N_b = b_k^\dagger b_k \tag{14.18}$$

と交換することに注意しよう．したがって，エネルギー固有状態は $a^\dagger$ と $b^\dagger$ の個数の確定した状態で，$SU(3)$ の既約表現として変換する．それらは

$$\begin{aligned}&|(n,m),K\rangle \\ &\equiv \left(a_{i_1}^\dagger \cdots a_{i_n}^\dagger\, b_{j_1}^\dagger \cdots b_{j_m}^\dagger - (\text{トレース部分})\right) \cdot \left(\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger\right)^K |0\rangle\end{aligned} \tag{14.19}$$

のような形をとり，$SU(3)$ の (n,m) 表現のように変換する．例えば，8重項状態は次のようになる:

$$\left(a_k^\dagger b_\ell^\dagger - \frac{1}{3}\delta_{k\ell}\left(\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger\right)\right)\left(\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger\right)^K |0\rangle \tag{14.20}$$

$a^\dagger$ の添字は $SU(3)$ の下付き添字のように働き，$b^\dagger$ の添字は上付き添字のように働く．既約表現は，$a^\dagger$ 添字と $b^\dagger$ 添字の対に於いてトレースが0でなければならない．

エネルギー固有値を計算することも簡単である．$SU(3)$ 対称性のために，既約表現の中のどの状態を見ても良いから，特に，最高ウェイト状態

$$|(n,m),K\rangle = \left(a_1^\dagger\right)^n \left(b_3^\dagger\right)^m \left(\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger\right)^K |0\rangle \tag{14.21}$$

を見よう．H の最初の二項は $a^\dagger$ と $b^\dagger$ を数えるだけである．自明でない項は Δ に比例する相互作用項である．しかし，この状態が固有状態であることは知っているので，単にそれを演算すれば良い．

$$\begin{aligned}&(\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger)\,(\vec{a} \cdot \vec{b})\,|(n,m),K\rangle \\ &= (\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger)\,\left[\vec{a} \cdot \vec{b},\, (a_1^\dagger)^n\right]\,(b_3^\dagger)^m \left(\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger\right)^K |0\rangle && (a) \\ &+ (\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger)\,(a_1^\dagger)^n\,\left[\vec{a} \cdot \vec{b},\, (b_3^\dagger)^m\right]\,\left(\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger\right)^K |0\rangle && (b) \\ &+ (\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger)\,(a_1^\dagger)^n\,(b_3^\dagger)^m\,\left[a_k,\, \left[b_k,\, \left(\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger\right)^K\right]\right]|0\rangle && (c)\end{aligned}$$

(a) は,

$$\begin{aligned}&(\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger)\,\left[\vec{a} \cdot \vec{b},\, (a_1^\dagger)^n\right]\,(b_3^\dagger)^m \left(\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger\right)^K |0\rangle \\ &= n\,(\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger)\,(a_1^\dagger)^{n-1}\,b_1\,(b_3^\dagger)^m \left(\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger\right)^K |0\rangle \\ &= n\,(\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger)\,(a_1^\dagger)^{n-1}\,(b_3^\dagger)^m \left[b_1,\, \left(\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger\right)^K\right]|0\rangle = n\,K\,|(n,m),K\rangle\end{aligned} \tag{14.22}$$

となる．(b) も同様にやれて，次を得る．

$$m\,K\,|(n,m),K\rangle \tag{14.23}$$

(c) は，

$$\begin{aligned}
&(\vec{a}^\dagger\cdot\vec{b}^\dagger)\,(a_1^\dagger)^n\,(b_3^\dagger)^m\,\left[a_k,\,\left[b_k,\,\left(\vec{a}^\dagger\cdot\vec{b}^\dagger\right)^K\right]\right]|0\rangle\\
&=(\vec{a}^\dagger\cdot\vec{b}^\dagger)\,(a_1^\dagger)^n\,(b_3^\dagger)^m\,\left[a_k,\,K\,a_k^\dagger\left(\vec{a}^\dagger\cdot\vec{b}^\dagger\right)^{K-1}\right]|0\rangle\\
&=K\,(\vec{a}^\dagger\cdot\vec{b}^\dagger)\,(a_1^\dagger)^n\,(b_3^\dagger)^m\left(\left[a_k,\,a_k^\dagger\right]\left(\vec{a}^\dagger\cdot\vec{b}^\dagger\right)^{K-1}+a_k^\dagger\left[a_k,\,\left(\vec{a}^\dagger\cdot\vec{b}^\dagger\right)^{K-1}\right]\right)|0\rangle\\
&=K\,(K+2)\,|(n,m),K\rangle
\end{aligned} \tag{14.24}$$

となり，よって，エネルギー固有値は

$$\omega_1\left(n+K+\frac{3}{2}\right)+\omega_2\left(m+K+\frac{3}{2}\right)+4\Delta\,K\,(n+m+K+2) \tag{14.25}$$

この模型の物理は特におもしろいわけではない．しかし，それは対称性がどのように現れるのかを示す例として，大変教育的である．ここで起こっていることを見る大変有用な考え方がある．しばらくの間，Δ に比例する相互作用項を，調和振動子項に対する摂動と考えよう．Δ 項がなければ，理論は，より大きな対称性 $SU(3)\times SU(3)$ ―― $a^\dagger$ 変数と $b^\dagger$ 変数と別々の $SU(3)$ 対称性 ―― を持つ (いくつかの $U(1)$ 対称性もあるが，ここでは非アーベル対称性に集中する)．相互作用項は a と b とを結合し，別々の $SU(3)$ 対称性を壊して，相互作用項を一重項とするような単一の $SU(3)$ 対称性にまで落とす．a_kb_k や $a_k^\dagger b_k^\dagger$ はその $SU(3)$ 対称性のもとで一重項であるからである．このような体系的なやり方で理論の対称性構造を整理することはしばしば有用である．

問題

14.A. 演算子

$$O_{ij}^k=a_i^\dagger a_j^\dagger a_k-\frac{1}{4}\left(\delta_{ik}a_\ell^\dagger a_j^\dagger a_\ell+\delta_{jk}a_\ell^\dagger a_i^\dagger a_\ell\right)$$

が (2,1) 表現のテンソル演算子として変換することを示せ．

14.B.　(上の問題 14.A で定義された演算子 O^k_{ij} の成分) O^3_{11} の，次の形の二状態

$$a_i^\dagger \left(a_\ell^\dagger b_\ell^\dagger\right) |0\rangle$$

および

$$a_j^\dagger a_k^\dagger \left(a_\ell^\dagger b_\ell^\dagger\right) |0\rangle \, .$$

の間での，0 でない行列要素を計算せよ.

14.C.　(14.13) が通常の角運動量

$$\vec{r} \times \vec{p}$$

を生成することを示せ.

14.D.　次式を示せ.

$$[Q_\alpha, \, a_k b_k] = 0 \, .$$

第15章

$SU(6)$ とクォーク模型

低いエネルギーに存在するバリオンのスペクトルに於いて，スピン1/2の8重項と，スピン3/2の10重項は，質量がそう離れているわけではない． 8重項と10重項の間の典型的(質量)分岐は，$SU(3)$ 表現内での分岐とそう違わない．このことに注目して，60年代には多くの物理学者が，その二つの表現を結びつけるような何らかの更に大きな対称性の群に $SU(3)$ を埋め込むというアイデアに興じた．しかし，8と10に属するバリオンは異なるスピンを持つから，その大きな群は角運動量と可換ではあり得ない．それは内部対称性と時空の対称性とを混合することを意味するので，問題を生ずると懸念されるかもしれない．事実，問題が生ずる．しかしこの問題は理論を相対論的にしようとした時に初めて現われるものである．ここではその問題のいくつかを議論するが，その可能な解決については後に回す．

15.1 スピンの取り込み

$SU(3)$ 対称性の群を拡張する明らかな方法は，クォーク状態に，クォークの種類だけでなくクォークのスピンを含めることである．これは，状態が $SU(3)$ 添字とスピン添字を持つ，6次元テンソル積空間を考えるべきことを示唆する——

$$\Big(|u\rangle, |d\rangle, |s\rangle\Big)\Big(|1/2\rangle, |-1/2\rangle\Big) \tag{15.1}$$

対応する対称性の群は，この6次元テンソル積空間に働く $SU(6)$ 対称性である．その生成子は，$SU(3)$ 空間の(必ずしもトレース0ではない) 3×3 行列とスピン空間の(再び，必ずしもトレース0ではない) 2×2 行列の積として書くこと

ができる．特に生成子は，$SU(3)$ 生成子

$$\frac{1}{2}\lambda_a \tag{15.2}$$

(ここでスピン空間での単位行列1があるものと了解しておく)，およびスピン生成子

$$\frac{1}{2}\sigma_j \tag{15.3}$$

(再び $SU(3)$ 空間での1を了解する) を含んでいる．すなわち，この $SU(6)$ は，6がその下で二つの3として変換するような $SU(3)$ 部分代数を持ち，また6がその下で三つの2として変換するような $SU(2)$ 部分代数を持つ．この $SU(3)$ と $SU(2)$ の生成子はお互いに可換である．このような場合，$SU(6)$ は6が $(3,2)$ として変換する $SU(3)\times SU(2)$ 部分群を持っていると言う．残りの $SU(6)$ 生成子は積

$$\frac{1}{2}\lambda_a\sigma_j \tag{15.4}$$

である．生成子の総数は，都合 8+3+24=35 となり，それは確かに，エルミートでトレース0の独立な 6×6 行列の個数と一致している．

三つのクォークからなる低い所にあるバリオンは，$SU(6)$ の56次元表現として変換する．56次元表現は三つの6の完全対称な組み合わせである．そのような表現がどう変換するのか理解するため，ひと息つこう．

15.2　$SU(N)\times SU(M)\in SU(NM)$

一般的状況は $SU(N)\times SU(M)\in SU(NM)$ である．このような埋め込みは，k が素数でない $SU(k)$ の場合のみ起こることで，$SU(2)$ や $SU(3)$ では現れない．アイデアは，いつもテンソル積空間のアイデアを利用することである．$SU(NM)$ の定義表現は NM 個の値をとる添字を持つから，その添字を，順序付きの対の添字 i,x (i は1から N まで走り，x は1から M まで走る) で置き換えることにより，それをテンソル積空間で記述できる．そうすれば，行列

$$[T_a^N]_{ij}\,\delta_{xy} \qquad \text{および} \qquad \delta_{ij}\,[T_a^M]_{xy} \tag{15.5}$$

は，エルミートでトレース0 (テンソル積空間ではトレースが両タイプの添字を縮約することを意味することを思い起こせ) であり，それぞれ $SU(N)$ と $SU(M)$ を生成する．

これらの行列で生成される $SU(N) \times SU(M)$ 部分代数の下で，NM 表現は (N, M) (あるいは，等価だが，([1],[1])) 表現として変換する ——すなわち，$SU(M)$ の下で互いに変換する $SU(N)$ の N の M 個のコピーがある —— あるいは，その逆でも良い．これが有用である理由は，しばしば生成演算子が，$SU(6)$ のクォーク状態における $SU(3)$ 添字とスピン添字のように，2 個以上の添字を持つからである．そういう場合，この種のテンソル積はそれらの自然な場所であり，そのような $SU(NM)$ 対称性は全く自然に現れる．

さてここで既約分解の問題を尋ねることができる．$SU(NM)$ の表現が一つ与えられたとき，それは $SU(N) \times SU(M)$ のもとではどう変換するだろうか?

特に，K 個の箱を持ったあるヤング図形に対応した $SU(NM)$ のある表現 D が与えられたとしよう．テンソルの言葉で言うと，D は K 個の $SU(N)$ 添字と K 個の $SU(M)$ 添字を持ったテンソルである．それゆえ，N-アリティと M-アリティのため，その分解が表現 (D_1, D_2) を含むとすれば (ここで D_1 は K_1 個の箱を持つ $SU(N)$ の表現で，D_2 は K_2 個の箱を持つ $SU(M)$ の表現である)，

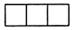
$$K = K_1 \, (\mathrm{mod}\, N) = K_2 \, (\mathrm{mod}\, M) . \tag{15.6}$$

である．更に進むためには，再び議論を逆向きにする方が易しい．先ず，必要なら，D_1 には N 個の箱の列を，D_2 には M 個の箱の列を，いくつか加えて，それぞれが全体で K 個の箱になるようにする．既約分解ということは，各箱に対の添字 (i, x) を持つ D のヤング図形で記述されるテンソルを，D_1 図形の添字 i と D_2 図形の添字 x とを持つテンソル積の線形結合として書き直すということである．

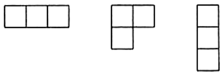
今や考え方は簡単である．D_1 図形と D_2 図形は両方とも，その k 個の添字の置換に対して，決まった対称性を持っている．それらは，対称群 S_k の既約表現に対応している．それで問題は，その積が D の対称性を持つ成分を持っているかどうか，ということである．もし持っていれば，(D_1, D_2) は D の分解に現れる．

もちろん，これで問題が完全に解けたわけではない．S_k の二つの既約表現のテンソル積が，三つ目のある表現を含んでいるかどうかを理解しなければならないからである．我々はこの問題を一般的に解くことは試みないが，いくつかの特別な例で，様子を伝えることができるだろう．

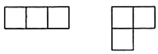
$SU(6)$ の 56 に対しては，この解析は簡単である．56 に対応するヤング図形は

 (15.7)

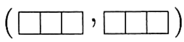
であり，これは，S_3 の自明な表現に対応する．三つの箱を持つ $SU(3)$ の既約表現は，三つある:

 (15.8)

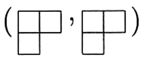
三つの箱を持つ $SU(2)$ の既約表現は，二つである:

 (15.9)

56 に含まれる $SU(3) \times SU(2)$ 表現は，対応する $SU(3)$ と $SU(2)$ 表現のヤング図形の S_3 表現のテンソル積の中に，S_3 の自明な表現が含まれるような，$SU(3)$ と $SU(2)$ 表現の対である．例えば，表現

 (15.10)

が現れる．完全対称な表現とそれ自身とのテンソル積には，完全対称な表現が含まれているからである．これは，$SU(3)$ の 10 でスピン 3/2 の表現である．他の可能性は

 (15.11)

である．これら二つの S_3 表現のテンソル積は，(後にあらわに見るように) 自明な表現を含む．なぜなら，$SU(3)$ 添字と $SU(2)$ 添字のどの対も，任意の置換の下で同じように変換するので，積は置換によって不変な表現を含む，からである．この表現は $SU(3)$ の 8 でスピン 1/2 の表現である．かくして，56 は低い所にあるバリオン状態をちょうど含んでいることがわかる．

15.3　バリオン状態

これらの状態をもっとあらわに見てみよう．10 重項状態は，$SU(3)$ 添字についても，$SU(2)$ 添字についても，それぞれが対称だから，特に簡単である．例

えば，スピン $\pm 1/2$ 状態を $|\pm\rangle$ と記して，

$$
\begin{aligned}
|\Delta^{++}, 3/2\rangle &= |uuu\rangle|{+}{+}{+}\rangle \\
|\Delta^{+}, 1/2\rangle &= \frac{1}{3}\Big(|uud\rangle + |udu\rangle + |duu\rangle\Big)\Big(|{+}{+}{-}\rangle + |{+}{-}{+}\rangle + |{-}{+}{+}\rangle\Big) \\
|\Sigma^{*0}, 1/2\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{6}\Big(|uds\rangle + |dus\rangle + |sud\rangle + |sdu\rangle + |dsu\rangle + |usd\rangle\Big) \\
&\qquad \cdot\Big(|{+}{+}{-}\rangle + |{+}{-}{+}\rangle + |{-}{+}{+}\rangle\Big)
\end{aligned}
\tag{15.12}
$$

8 重項状態は，(ヤング図形に列があるため) 一対のスピン添え字と，クォークラベルに関して反対称なので，もっと複雑である．完全対称な状態を得るには，その二つをかけ算してから巡回置換すればよい．例えば，

$$
\begin{aligned}
|\Lambda, 1/2\rangle = \frac{\sqrt{3}}{6}\Big\{&\Big(|uds\rangle - |dus\rangle\Big)\Big(|{+}{-}{+}\rangle - |{-}{+}{+}\rangle\Big) \\
&+\Big(|sud\rangle - |sdu\rangle\Big)\Big(|{+}{+}{-}\rangle - |{+}{-}{+}\rangle\Big) \\
&+\Big(|dsu\rangle - |usd\rangle\Big)\Big(|{-}{+}{+}\rangle - |{+}{+}{-}\rangle\Big)\Big\}
\end{aligned}
\tag{15.13}
$$

この表記では，クォークラベルとスピン状態は同順で記している．すなわち，最初のクォークラベルは最初のスピン状態と組になり，等々．この Λ 状態は，ある一対の粒子についてスピンとクォークラベルを一緒に交換すれば，これらの 3 項のうち，一つは不変で，他の 2 項は互いに交換される，という風にうまく機能している．状態の規格化にも注意しよう．これらの状態を作るのに，しばしばもっと便利なのは，最初の二つについて対称な $|uud\rangle$ のような，ある対の添え字について対称な $SU(3)$ 状態に，同じ対について対称だが全スピンが $1/2$ になっているスピン状態を掛けて作る方法である．ここでもまた巡回置換項を加えて完全対称な状態とする．例をあげれば，

$$
\begin{aligned}
|P, 1/2\rangle = \frac{\sqrt{2}}{6}\Big\{&|uud\rangle\,\Big(2|{+}{+}{-}\rangle - |{+}{-}{+}\rangle - |{-}{+}{+}\rangle\Big) \\
&+ |udu\rangle\,\Big(2|{+}{-}{+}\rangle - |{-}{+}{+}\rangle - |{+}{+}{-}\rangle\Big) \\
&+ |duu\rangle\,\Big(2|{-}{+}{+}\rangle - |{+}{+}{-}\rangle - |{+}{-}{+}\rangle\Big)\Big\}
\end{aligned}
\tag{15.14}
$$

例えば，第一項では，$|{+}{-}{+}\rangle$ 状態と $|{-}{+}{+}\rangle$ 状態は，最初の二つのクォークの交換の下での対称性から同じ係数を持たねばならないが，$|{+}{+}{-}\rangle$ 状態は自動的に対称

だから違った係数を持ちうる．その係数は，完全対称なスピン 3/2 状態と直交することを保証するよう，係数の和がゼロになるように選んだ．これは決して 10 重項状態を与えない．もし $SU(3)$ 状態が完全対称なら，巡回置換項の足し上げでゼロとなって非自明な状態を与えない．ここでも，任意の一対の粒子についてスピンとクォークラベルを一緒に交換すれば，これらの 3 項のうち，一つは不変で，他の 2 項は互いに交換される．

15.4　磁気モーメント

さて，ここで $SU(6)$ 対称性を用いてバリオンの磁気モーメントに関して何が言えるのか見てみよう．クォークの $SU(6)$ の性質を決めるため，次のことに注意する．もしクォークが (電子と同じような) 点粒子であるとすれば，その磁気モーメントは近似的に

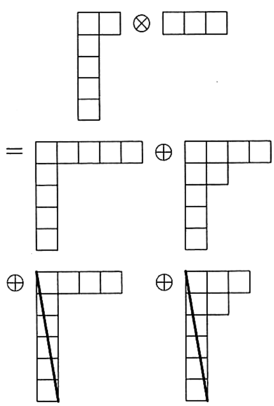
$$\frac{e}{2m} Q \vec{\sigma} \tag{15.15}$$

であろう．ここで m はクォークの質量で，eQ はクォークの電荷である．これは一つの $SU(6)$ 生成子であるから，我々は磁気モーメント演算子が 35 次元随伴表現のように変換することが推測できる．

したがって我々は行列要素

$$\langle 56|35|56\rangle \tag{15.16}$$

に興味がある．ところが $35 \otimes 56$ は



(15.17)

である．この分解には 56 が一つしかないので，この行列要素は一つの既約行列要素によって決定されることがわかる．それゆえ，35 表現の正しい成分として変換する任意の演算子の行列要素を調べれば，磁気モーメントが全体の比例係数を除いて計算できる．特に，$SU(6)$ 生成子そのものを使うことができて，

$$\mu_{56} \propto \langle 56|\, Q\, \vec{\sigma}\, |56\rangle \tag{15.18}$$

が結論される．我々は，この関係式を用いて陽子と中性子の磁気モーメントの比を計算できるが，それは Coleman-Glashow の解析では決定できなかったものである．同じ σ_3 の値を持つ状態間で行列要素を計算すれば $Q\sigma_3$ の行列要素のみがゼロでないので，それを計算すればよい．これは単にテンソル積の規則を適用するだけでやれる:

$$\begin{aligned} Q\,\sigma_3\,|P,1/2\rangle = \frac{\sqrt{2}}{6}\Big\{ & \frac{2}{3}|uud\rangle \Big(2|{+}{+}{-}\rangle - |{+}{-}{+}\rangle + |{-}{+}{+}\rangle\Big) \\ & + \frac{2}{3}|uud\rangle \Big(2|{+}{+}{-}\rangle + |{+}{-}{+}\rangle - |{-}{+}{+}\rangle\Big) \\ & - \frac{1}{3}|uud\rangle \Big(-2|{+}{+}{-}\rangle - |{+}{-}{+}\rangle - |{-}{+}{+}\rangle\Big) \\ & + \text{巡回置換項} \Big\} \end{aligned} \tag{15.19}$$

よって

$$\begin{aligned} &\langle P,1/2|Q\sigma_3|P,1/2\rangle \\ &= 3\,\frac{2}{36}\Big(\frac{2}{3}(4+1-1) + \frac{2}{3}(4-1+1) - \frac{1}{3}(-4+1+1)\Big) = 1 \end{aligned} \tag{15.20}$$

中性子状態ではさんだ行列要素は，この計算で単に u たちと d たちを交換すれば得られる．その交換は 2/3 と $-1/3$ の因子の交換を意味するので，

$$\begin{aligned} &\langle N,1/2|Q\sigma_3|N,1/2\rangle \\ &= 3\frac{2}{36}\Big(-\frac{1}{3}(4+1-1) - \frac{1}{3}(4-1+1) + \frac{2}{3}(-4+1+1)\Big) = -\frac{2}{3} \end{aligned} \tag{15.21}$$

を得る．それゆえ，

$$\frac{\mu_P}{\mu_N} = -\frac{3}{2} \tag{15.22}$$

が予想される．実験的には，核磁子 $(e/2m_P)$ の単位で

$$\mu_P = 2.79 \qquad\qquad \mu_N = -1.91$$
$$\frac{\mu_P}{\mu_N} = -1.46 \tag{15.23}$$

うまくいっている．しかしこの論理はかなり迂遠である．クォーク模型から我々は磁気モーメント演算子の $SU(6)$ 変換性だけをとり出した．次に Wigner-Eckart 定理を用い，$SU(6)$ 生成子の対応する行列要素を調べて比が導けることを示した．

我々は，クォークが非相対論的な構成子として存在し，バリオンが実際に三つのクォークの角運動量ゼロの束縛状態である，ということを単純に仮定すれば，その結果をもっと簡単に得ることができる．そうすれば，バリオンの磁気モーメントはクォークの磁気モーメントの単なる和である．クォークの磁気モーメントは (電子とのアナロジーで)，m をクォーク質量として，スピンの方向に $Qe/2m$ であり，

$$\frac{e}{2m} Q\,\vec{\sigma} \tag{15.24}$$

と書ける．それゆえテンソル積の言葉で，クォークの磁気モーメントの和は，

$$\frac{e}{2m} \sum_{\text{quarks}} Q\,\vec{\sigma} \tag{15.25}$$

陽子の磁気モーメントは $(e/2m_P)\mu_P$ と書かれる．ここに m_P は陽子質量，μ_P は "核磁子" 単位で測った磁気モーメントである．よって

$$\frac{e}{2m_P}\mu_P = \frac{e}{2m}\langle P|Q\vec{\sigma}|P\rangle/\langle P|\vec{\sigma}|P\rangle = \frac{e}{2m} \tag{15.26}$$

これは $SU(6)$ の議論で行った計算そのものであるが，一つだけ付加的な情報を含んでいる —— 大きさがわかるのである．もし，クォーク質量が陽子質量の約 1/3 であると仮定すれば，

$$\mu_P = \frac{m_P}{m} = 3 \tag{15.27}$$

となる．これは悪くない!

クォーク模型は，かくして，$SU(6)$ よりも簡単であるばかりでなく，より予言能力があるのである．それは，バリオンの磁気モーメントにおけるある $SU(3)$

の破れの効果に対しても合理的な説明を与える．例えば，Λ の磁気モーメントに対する Coleman-Glashow の予言は

$$\mu_\Lambda = -\frac{1}{3}\mu_P = -.93 \tag{15.28}$$

である．これは直接 $SU(6)$ においても

$$\langle \Lambda, 1/2|Q\sigma_3|\Lambda, 1/2\rangle = -\frac{1}{3} \tag{15.29}$$

を計算すればわかる．しかし，実験的には

$$\mu_\Lambda \approx -.61 \tag{15.30}$$

であり，著しくくいちがっている．クォーク模型は

$$\frac{e}{2m_p}\mu_\Lambda = \sum_{\text{quarks}} \frac{e}{2m_{\text{quark}}} Q\sigma_3 \tag{15.31}$$

を与える．その行列要素には，Λ，(15.13) 式，の中で，u と d のスピンはスピン 0 に組まれているので，実際上 s クォークだけが寄与している． よって，

$$\mu_\Lambda = -\frac{1}{3}\,\frac{m}{m_s}\,\mu_P \tag{15.32}$$

と予言される．クォーク模型では，s クォークを含むハドロンのより大きな質量を説明するため，s クォークは u や d クォークよりも重いと考えられている．例えば，(相当おおざっぱに) $m_\Lambda \approx m_s + 2m$ および $m_P \approx 3m$ と仮定すれば，

$$m_s \approx \frac{3m_\Lambda - 2m_P}{3} \approx 490\,\text{MeV} \tag{15.33}$$

よって

$$\mu_\Lambda \approx -.59 \tag{15.34}$$

となって[1]， すこし良くなる．

[1](訳者注) ここの数値は，原著では $-.64$ となっているが，$m \approx m_P/3 \approx 313$ MeV を用い，本文の説明通りに計算すれば上の値になる．

問題

15.A.　(本文で議論した P，N，Λ 以外の) 全てのスピン 1/2 バリオンに対して $SU(6)$ (すなわちクォーク模型の) 波動関数を求めよ．

15.B.　(15.A) で求めた波動関数を用いて，これらのバリオンの磁気モーメントを次の二通りに計算せよ．

a.　$SU(6)$ の極限で μ_P に対する比を計算せよ．

b.　クォーク模型で $SU(3)$ 対称性の破れを $m_s \neq m_{u,d}$ として取り入れよ．

15.C.　(15.13) の $|\Lambda, 1/2\rangle$ 状態がアイソスピン 1 重項であることを示せ．

第16章

カラー

前章で議論した単純なクォーク模型にはまずい点がいくつかある．先ず一つはスピンと統計の関係がこれらのクオークに対して破れているように見えることである．スピン 1/2 と 3/2 のバリオンを与えるためには，クオークはスピン 1/2 を持たねばならない．それゆえ，クオークはフェルミ・ディラック統計に従うと期待される．さらに我々は，クオーク 3 体系の基底状態は s-波状態で，三つの粒子の位置交換に関して完全対称であると予想する．このことは，バリオン状態として，三つのクオークの $SU(6)$ 添字について完全**反**対称な $SU(6)$ 表現 —— [3] すなわち 20 表現，$SU(3)\times SU(2)$ の下では $([2,1],[2,1])\oplus([3],[1,1,1])$ すなわち $(8,2)\oplus(1,4)$ として振る舞う表現，に導く．ところが，それは我々の欲しいものではない．

二番目の困難は，何故 $\bar{q}q$ および qqq というクオークの組み合わせのみが存在するのかについて何らかの説明が必要な点である．これは確かに，クオーク間の単純な引力によっては説明できないだろう．

最後に，現在では，クォークが**カラー**と呼ばれる属性を持っていることに関しては高エネルギー QCD の研究から膨大な量の証拠がある．クォークは三つのカラーを持ち，カラーは，$SU(3)$ 対称な形で 8 個のグルーオンの組と相互作用する．カラー相互作用に付随する $SU(3)$ は，カラー $SU(3)$ と呼ばれる．それは **Gell-Mann の** $SU(3)$ **とは無関係である**．もちろん，それが軽いクォークを Gell-Mann の表現になるよう結びつける力を与える，という点を除いてである．

16.1　カラーを持ったクォーク

クォーク状態は 3 として変換する —— すなわち，1 から 3 まで走るカラー $SU(3)$ の添え字を一つ持っている．クォーク波動関数はテンソルである:

$$q^i \quad (\, i = 1, \cdots, 3)\,. \tag{16.1}$$

それらは同時に，Gell-Mann の $SU(3)$ (フレーバー)，スピン，位置，のラベルも持っている．アイデアは，カラー相互作用が三つのクォークを結びつけ，カラー 1 重項のバリオンを作るということである．それで，バリオン状態はクォークのカラー波動関数を ϵ で縮約して記述される ——

$$\epsilon_{ijk}\, q^i\, q^j\, q^k \tag{16.2}$$

それゆえ，ϵ は完全反対称であるから，バリオン状態は他の全てのラベルの交換の下で対称なのである．

このように三つのクォークが束縛されて $SU(3)$ 1 重項バリオンになるということが，カラー $SU(3)$ 添え字に対して "カラー" と名付ける動機となった．色の無い光が，赤，緑，青の 3 原色の光線を混ぜ合わせて作れるという事実にもとづく比喩である．光と同様に，**カラーの無い** (すなわちカラー $SU(3)$ 1 重項の) バリオン状態が三つのカラーを持つクォークからできている．それで，カラー $SU(3)$ 添え字も，1，2，3 ではなく，赤，緑，青と呼ばれることがある．

カラーという言葉が使われるようになって，今度は，クォークの種類を区別する u，d，s，等々のラベルの方がフレーバーと名付けられることになった．Gell-Mann の $SU(3)$ は，軽いフレーバーを互いに変換するので，フレーバー $SU(3)$ と呼ばれることもある．フレーバーは全く独立な属性であり，クォークはカラーとフレーバー (と，もちろんスピン) を持っている．

反クォークはカラー $SU(3)$ の下で $\overline{3}$ として振る舞う．何故なら，カラー電荷は，少なくとも対角化可能な Cartan 部分群の電荷は，電気の電荷やバリオン数のような量子数であり，電気の電荷やバリオン数と同様，粒子から反粒子に行くと符号が変わるからである．Cartan 電荷が符号を変えると，ウェイトの符号が変わることを意味し，3 表現からその複素共役の $\overline{3}$ にいくことを意味する．

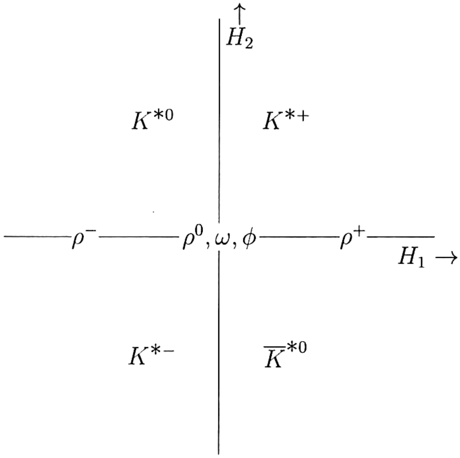
三つの反クォークから ϵ で縮約してカラー 1 重項を作ることもできる:

$$\epsilon^{ijk}\, \overline{q}_i\, \overline{q}_j\, \overline{q}_k \tag{16.3}$$

これは反バリオンを記述する．あるいは，一つのクォークと一つの反クォークからカラー 1 重項を作ることもできる:

$$q^i \, \overline{q}_i \tag{16.4}$$

これらはメソンである．メソンには，擬スカラー・メソンの 8 重項や擬スカラー 1 重項 η'，それに，次の図に示すスピン 1 **ベクトル・メソン**の 8 重項プラス 1 重項，などがある:



(16.5)

何故カラーの力はこれらの状態を束縛するのだろうか? 部分的な答えは，それが電磁気的な力と同じように振る舞う，ということである．グルーオンは，光の粒子 – 光子が ($U(1)$ 対称性の生成子である) 電荷に結合するのとちょうど同じように，$SU(3)$ 生成子である**カラー電荷**に結合する．二つの対象の間に働く電磁気力は，両者の電荷の積が負であれば引力である．このために，電磁気力は電気を帯びた粒子を結びつけ，中性の原子や分子にする傾向があるのである．カラーの場合と一つ異なる点は，光子が一つに対し，グルーオンは 8 個あるので，二つのカラーを持つ粒子間のカラー相互作用は，両者のカラー電荷の積の和に比例することである．もしこれが負なら，力は引力である．

具体的に，カラー $SU(3)$ のある表現として変換する粒子 A と B

$$\begin{aligned} T_a^A |r, A\rangle &= |s, A\rangle \, [T_a^A]_{sr} \\ T_a^B |x, B\rangle &= |y, B\rangle \, [T_a^B]_{yx} \end{aligned} \tag{16.6}$$

の二粒子状態を考えよう．ここで r, s (x, y) は，A (B) 表現のカラー添字である．そうすれば二粒子状態はテンソル積

$$|v, A, B\rangle = v_{rx}|r, A\rangle|x, B\rangle \tag{16.7}$$

である．このとき，カラー相互作用は，(通常の意味のテンソル積空間における)電荷の積

$$T_a^A T_a^B \quad (a\text{について和}) \tag{16.8}$$

に比例する．これは，テンソル積空間上の生成子が

$$T_a = T_a^A + T_a^B \tag{16.9}$$

で与えられることから，$SU(3)$ 不変であることがわかる．実際 (16.9) は (16.8) と可換である:

$$\begin{aligned} &\left[T_a^A + T_a^B,\, T_b^A T_b^B\right] \\ &= \left[T_a^A,\, T_b^A\right] T_b^B + T_b^A \left[T_a^B,\, T_b^B\right] \\ &= i\, f_{abc}\,(T_c^A T_b^B + T_b^A T_c^B) = 0 \end{aligned} \tag{16.10}$$

(16.8) の固有状態は，Schur の補題により，カラー $SU(3)$ の既約表現である．固有値を計算するには

$$T_a^A T_a^B = \frac{1}{2}(T_a^2 - T_a^{A^2} - T_a^{B^2}) \tag{16.11}$$

と書き直すのが便利である．(a について和をとった) T_a^2 は，**Casimir 演算子**と呼ばれる (それは角運動量 $SU(2)$ の場合の $\vec{J}^2$ の類似物である)．容易にわかるように，それは $SU(3)$ 生成子と可換であり，それゆえ各既約表現上で一つの数である．$T_a^{A^2}$ と $T_a^{B^2}$ は，関与している粒子の性質であるから決まった数であるが，T_a^2 は A と B の状態がどういうカラーの既約表現に組まれているかに依存する —— すなわち，我々の見ているテンソル積状態の特定の線形結合が $SU(3)$ の下でどう変換するのか，に依存し，既約表現として変換する状態に対して定まった値をとる．おおざっぱに言うと，T_a^2 はカラー表現のサイズを測る．T_a^2 が小さいほど，その状態はカラーが少ない．よって，カラーの力はカラーが最も少ない状態において最も引力が強い．それゆえ，クォークや反クォークたちを

できる限り最もカラーの無い状態に結び付ける傾向がある．これは正しい方向への一歩である．

$q\overline{q}$ 状態に於いて最も引力が強い状態は ($T_a^2 = 0$ を持つ) $SU(3)$ 1 重項である．三つのクォーク状態に於いては，クォークの各対を順に考えればよい．クォーク対のカラーが対称に組まれれば，その qq 状態は 6 である．反対称に組まれれば $\overline{3}$ である．T_a^2 は $\overline{3}$ に対し 4/3 であり，6 に対し 10/3 である．よって，反対称な組み合わせが最も引力が強い．よって，最も好まれる状態は，各クォーク対がカラーに関し反対称な状態，すなわち，完全反対称なカラー 1 重項状態である．

16.2 量子色力学 QCD

カラーに関してはさらに多くのことがある．電子と光子の電磁相互作用の量子論が **QED**，**量子電気力学** (Quantum Electrodynamics) と呼ばれるのと同様に，クォークとグルーオンのカラー相互作用の量子論は，**QCD**，**量子色力学** (Quantum Chromodynamics) と呼ばれる．

QCD には，理論に組み込まれた次元を持つ量 Λ_{QCD} があり，数百 MeV である．QCD 相互作用は $1/\Lambda_{\mathrm{QCD}}$ より小さな距離ではかなり弱いが，$1/\Lambda_{\mathrm{QCD}}$ より大きな距離では強くなる．今日我々は，クォークは長距離での強い QCD 相互作用によってカラーの無いハドロンの中に永久的に閉じ込められており，カラーを持つクォークをそのハドロンの環境から完全に分離することは決してできない，と信じている．このことは，我々がクォークを決して見ることができないと言っている訳ではない．事実我々は，Λ_{QCD} よりずっと大きいエネルギーや運動量での散乱実験でクォークやグルーオンをかなり直接に見ている．しかしそれは，クォークが低エネルギースペクトルに直接には現れないことを意味しているのである．

強い相互作用のこの描像により，Gell-Mann の $SU(3)$ が**何故**有用な対称性であるのかがわかる．グルーオンの相互作用はクォークのそれぞれに対し同じなのである．(強い相互作用に於いて) クォークの間の区別を付けるのはその質量だけである．QCD のハミルトニアンに於いて質量項は

$$m_u\,\overline{u}\,u + m_d\,\overline{d}\,d + m_s\,\overline{s}\,s \tag{16.12}$$

のように書かれる．ここで u，d，s ($\overline{u}$，$\overline{d}$，$\overline{s}$) は u，d，s クォークの消滅 (生

成) 演算子である．これは次のように書き直せる:

$$(m_u + m_d + m_s)\,(\overline{u}\,u + \overline{d}\,d + \overline{s}\,s)/3 \qquad (a)$$

$$+(m_u - m_d)\,(\overline{u}\,u - \overline{d}\,d)/2 \qquad (b)$$

$$+(2m_s - m_u - m_d)\,(2\,\overline{s}\,s - \overline{u}\,u - \overline{d}\,d)/6 \qquad (c)$$

(a) は $SU(3)$ 不変である．(b) はアイソスピン対称性を破る．アイソスピン対称性はかなり良いので，この u-d 質量差は大変小さな量，数 MeV 程度，であると考えられている．この項は，アイソスピン対称性の破れに興味がない限り無視できる小さな摂動である．それは，多分電磁相互作用とは無関係だが，偶々電磁相互作用と同じくらいの大きさの効果を持っている．(c) は，Gell-Mann の $SU(3)$ の破れのほとんどを引き起こしている項である．それはかなり小さい．何故なら，例えば $SU(3)$ 表現内の質量分裂によって測られる，$s-u$ や $s-d$ のクォーク質量差が $\Lambda_{\rm QCD}$ と比較すれば大きくないからである．(c) がテンソル演算子，8 重項の第 8 成分であることに注意しよう．これが，ハミルトニアンの中の中位の強い相互作用の変換則に対する元々の Gell-Mann の推量が実際うまくいった理由である．今では我々は力学についてなにがしかの理解を持っているので，もはや推測をする必要はないのである．

16.3　重いクォーク

ご存じのように，u，d，s 以外に，他のクォークも存在している．(チャーム (charm) の) c クォーク，(ボトム (bottom) ないしは beauty の) b クォーク，(トップ (top) ないしは truth の) t クォークは，すべて高エネルギー衝突で観測されている．それらは皆不安定で，瞬時に軽いクォークに崩壊する．しかし c クォークと b クォークは，軽いクォークと同じようにハドロンを形成する位の長さの寿命はある．それで，今では c や b クォークを含む粒子の豊富な現象論がある．これらの粒子は，Gell-Mann が最初に $SU(3)$ 対称性の帰結を調べた時には，見られていなかったし，ほとんど想像さえされなかった．

これらの状態は Gell-Mann の $SU(3)$ の下でどのように変換するのか? 読者はこれらの状態がどのように見えるのか推測できるはずである．メソン状態とバリオン状態がある．重い b や c の反クォークと軽い u，d，s クォークからなる

メソン状態は，軽いクォークが $\mathbf{3}$ だから，$\mathbf{3}$ として変換する．重い b や c クォークと軽い u，d，s 反クォークからなるメソン状態は，軽い反クォークが $\overline{\mathbf{3}}$ だから，$\overline{\mathbf{3}}$ として変換する．クォークと反クォーク共に重いメソン状態は $SU(3)$1 重項である．重いクォークは $SU(3)$ の性質を何も持っていないから，Gell-Mann の $SU(3)$ の下で自明に変換する．一つの重いクォークと二つの軽いクォークを含むバリオンは，$SU(3)$ の $\mathbf{6}$ および $\overline{\mathbf{3}}$ として変換する，などなど．

16.4 フレーバー $SU(4)$ は役に立たない！

Gell-Mann のフレーバー $SU(3)$ 対称性を，c あるいは c と b クォークを含めて $SU(4)$ ないしは $SU(5)$ に拡大しようという一見魅力的なアイデアを得る人がしばしば居る．悲しいかな，この明らかに思われる拡張は全く役に立たないのである．問題は，c や b クォークの質量が軽いクォークの質量よりはるかに大きく，お互いに非常に異なっていて，これらのクォークを含む質量差は $\Lambda_{\rm QCD}$ **よりはるかに大きい**．Gell-Mann の $SU(3)$ を有用なものとした $SU(3)$ の破れの摂動論的記述は $SU(4)$ や $SU(5)$ へ拡張した時にはもはや適切ではない．だまされてはいけない．

問題

16.A. メソンの中の $q\bar{q}$ 状態とバリオンの中の qq 対に対する，カラー電荷の積の和の間の関係を求めよ．

16.B. カラー $SU(3)$ の下で $\mathbf{6}$ として変換する "クィックス"(quix) Q なるものが存在したとしよう．一つのクィックスと通常のクォークや反クォーク達とのどのような束縛状態が期待されるか? それらの状態は Gell-Mann の $SU(3)$ の下でどのように変換するか? **ヒント:** Gell-Mann の $SU(3)$ は軽いクォークだけを変換するので，クィックスはフレーバー 1 重項である．また，波動関数が二つの独立なカラー 1 重項に因子分解できない状態だけを含むべきである．例えば，軽いクォークについてだけ考えていると，$\bar{q}qqqq$ のような状態は含められないだろう．何故なら，どんな波動関数を書いてもカラー 1 重項の $\bar{q}q$ とカラー 1

重項の qqq に因子分解してしまうからである．対応する状態はおそらく，メソンとバリオンにばらばらになるだろう．

16.C.　小さな表現 D に対して Casimir 演算子 $C(D)$ $(=T_a^2)$ を計算する便利な方法がある．

$$\mathrm{Tr}\, T_a^2 = \dim(D)\, C(D) = \sum_a \mathrm{Tr}(T_a T_a) = \sum_a k_D = 8k_D$$

に注意する．ここで k_D は (6.2) で定義され，$\dim(D)$ は表現 D の次元である．．$D=3$ (または $\bar{3}$) に対しては $k_D = 1/2$ だから，$C(D) = 4/3$．一方 k_D は $\oplus$ や $\otimes$ の下で次の簡単な振る舞いをする:

$$(a)\quad k_{D_1 \oplus D_2} = k_{D_1} + k_{D_2}$$

$$(b)\quad k_{D_1 \otimes D_2} = \dim(D_1)\, k_{D_2} + \dim(D_2)\, k_{D_1}$$

(a) および (b) を証明せよ．またこれらを用いて $C(8)$，$C(10)$，$C(6)$ を計算せよ．

第17章

構成子クォーク

ハドロンのカラー $SU(3)$ 理論は，正真正銘，強く相互作用している理論である．QCD の予言を摂動級数で表すのに使うことができるような明らかに小さなパラメータというものは存在しない．現在の所，QCD の第一原理計算は，汎関数積分の大規模計算機による評価でしか行えない．そのような計算は，QCD が軽いハドロンのスペクトルを説明出来ることに対する重要な証拠を与えたが，その解析は完成にはほど遠い．この複雑さを考えれば，簡単な非相対論的クォーク模型が軽いハドロンの質量に対してまずまずの定性的な描像を与えることは注目すべきことである．この節では，この描像を簡単に復習する．

17.1 非相対論的極限

もしすべてのクォークが QCD パラメータ Λ に比べて大変大きな質量を持っていたとすれば，非相対論的クォーク模型は簡単に正当化できたであろう．そのような場合は，QCD 相互作用は，前の章で議論したようなグルーオンの非アーベル的振る舞いに付随した二三の特性を除けば，通常の電気力学のように振る舞うだろう．バリオンは単なる非相対論的束縛状態であろう．束縛状態のエネルギーを，大きな質量の逆べき展開で系統的に計算することもできたであろう．主要な寄与は単にクォーク質量の和である．次のオーダーには，空間波動関数に依存するがクォーク・スピンには依存しない，カラー相互作用からの寄与があるだろう．u，d，s の質量が縮退している極限では，15 章で議論したような近似的 $SU(6)$ 対称性が成り立つだろう．$SU(6)$ を破る主要項のスピン依存相互作用は，皆カラー磁気の相対論的効果であるから，質量の逆べきで抑え

られるだろう．(主に $\ell = 0$ 状態にある) 基底状態に対するその効果の最も重要なものは，構成子クォークのスピン間のカラー磁気相互作用であろう．

この描像は，クォークが軽いにもかかわらず，驚くほどうまく行く．(もっとも，π 粒子は非相対論的束縛状態と思うには軽すぎるので，擬スカラーメソンを記述することはうまくいかない，という点は補足しておかねばならないが．) 我々はそれが何故それほどうまく行くのか理解していないが，バリオンやメソン系の基底状態，すなわち，$SU(6)$ の 56 表現バリオン (スピン 1/2 の 8 重項とスピン 3/2 の 10 重項) と $6 \otimes \bar{6}$ 表現のクォーク-反クォーク束縛状態 (スピン 1 と 0 の 8 重項と 1 重項)，の質量に対してそれがどのような描像を与えるのかを見てみよう．

この描像に関して本当におもしろいのは，スピン依存相互作用の効き方である．基底状態が主に s-波であるならば，単一のカラー磁気能率相互作用からの寄与はないだろう．しかしながら，カラー双極子の相対的な向きに依存する，クォーク間のグルーオン交換からの重要な寄与が存在する．カラー因子を除けば，この相互作用は電子の磁気能率の間の，あるいは電流のループの間の相互作用と同様なものである．二つの電流ループが同じ位置に重なっている場合，双極子能率の方向が揃っている方が，反平行になっている場合より低いエネルギーをもつ．

バリオンとメソンのどちらに於いても，対の中でのカラーの力は引力である．よって，磁気能率の相互作用は，逆電荷を持つ電子と陽電子の間の磁気双極子相互作用に似たものとなる．(16 章で説明したように，陽子の中の三つの対のそれぞれにおいてクォークが "逆符号の" の電荷を持つかのように振る舞えるのは，カラーのマジックである) それゆえ，磁気能率の方向がが揃っているのはスピンが反平行に，磁気能率が反平行なのはスピンが平行に，それぞれ対応する．それゆえ，スピンが反平行になっている場合の方が揃っている場合よりエネルギーが低いと期待される．形式的には，ハミルトニアンの中に

$$\sum_{\substack{\text{pairs}\\ i,j}} \frac{\kappa}{m_i m_j} \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j \tag{17.1}$$

のような形の項がある．ここで，σ 達は，スピンに作用するパウリ行列で，κ はクォークたちの位置のある関数である．因子 $1/m_i$ があるのは，カラー磁気能率がクォーク質量に逆比例するからである．波動関数が ($SU(3)$ 極限での) クォー

クの種類やクォークスピンに依存しない範囲内では，κ は 56 次元ないしは 35 次元表現の全体にわたって単なる定数である．

スピンスピン相互作用 (17.1) は，中でスピンの方向が揃っているスピン 1 のメソンを，スピンが逆向きになっているスピン 0 のメソンより重くする．それはまた，中のクォークのどの対もスピンが揃っているバリオンの 10 重項を，どれかの対のスピンが逆向きになっている 8 重項より，重くする．特に，クォーク間の質量差を無視すれば，それは明らかに全スピン $\vec{S}$ のみに依存する．何故なら，それは

$$\begin{aligned}
&\frac{\kappa}{m^2}\sum_{\substack{\text{pairs}\\ i,j}}\vec{\sigma}_i\cdot\vec{\sigma}_j\\
&=\frac{\kappa}{2m^2}\left(\sum_{i,j}\vec{\sigma}_i\cdot\vec{\sigma}_j-\sum_{j}\vec{\sigma}_j\cdot\vec{\sigma}_j\right)\\
&=\frac{\kappa}{2m^2}\left(4\vec{S}^2-3n\right)
\end{aligned}\tag{17.2}$$

と書けるからである．ここで n は，バリオンでは 3，メソンでは 2 である．

この描像の真の美しさは，基底状態の粒子の質量において，カラー磁気相互作用のクォーク質量依存性を見ることができる点にある．例えば，Ξ^* と Ξ の間の質量分岐は，Δ-N 分岐より小さいが，それは，前者がより重い s クォークを含むからである．メソン系でも同様で，K^*-K 分岐は，同じ理由で ρ-π 分岐より小さい．この系列の話で最もおもしろい例は，Σ-Λ 分岐である．この二つのバリオンは同じクォーク，すなわち一つの u，一つの d，一つの s から出来ており，かつ同じ全スピンを持っている．違いは，クォークスピンの足し上げ方である．Σ においては，そのアイソスピンが 1 なので，u と d クォークは対称なフレーバー状態であり，よって，(カラー部分で反対称だから) スピン空間で対称でなければならないため，スピンが揃わねばならない．一方 Λ では，アイソスピンは 0 であり，u と d クォークは反対称なフレーバー状態で，よってスピンは反平行である．カラー磁気相互作用は，より軽い u や d クォーク間のそれがより重要であるので，Λ がより低いエネルギーを持つのである．

しかも要求される m_s の $m_{u,d}$ に対する比の値は，メソンとバリオンで大体同じである．読者にはこれを問題 17.B で示してもらう．

この簡単な描像は QCD の初期の段階で発展させられたものであるにもかかわらず，その成功が単なる偶然であるのか，QCD について何か重要なことを教

えているものなのか，あるいは両方か，未だに確かには分かっていない．おそらく両方だろう．確かに，その描像がもっと複雑であると信ずる理由がある．何故なら，クォーク質量の比を評価する別の方法があって，それは大変異なる結果を与えるからである．しかし一方，この章で記述した構成子クォーク模型の描像は重い c や b クォークを含むメソンやバリオンの賢明な記述に大変スムースにつながる，ということも事実である．よって，先の章で説明したように，これらの状態に対しては，対称性はひどく破れているので，それらを理解するためにもっと強力な対称性の議論は使えないけれども，直接クォーク模型を使えば未だそれらについて多くを理解することができるのである．重いクォークと軽いクォークの両方の状態に対して構成子クォーク模型が同時に成功を収めたことで，私は，それが少なくとも QCD の束縛状態の物理に対して何らかの重要な部分を捉えているということを確信した．

問題

17.A.　(16.B) で述べたクイックス Q が，重いスピン 0 の粒子であるとしよう．そうすると，一つの反クィックスと二つの軽いクォーク (u，d，s のどれでもよい) の束縛状態 $qq\overline{Q}$ の基底状態において，スピン依存性は (基底状態では軌道角運動量はおそらくゼロなので) 軽いクォークからのみ来る．スピンが 0 と 1 の全ての $qq\overline{Q}$ の基底状態の粒子のスペクトルを議論し，それらの $SU(3)$ の性質とスピンを含め答えよ．**ヒント:** 基底状態に於いては，二つのクォークの空間波動関数は交換に関し対称であると期待して良い．

17.B.　ρ-π の質量分岐と K^*-K 質量分岐とを比較することにより，$m_{u,d}/m_s$ を評価せよ．この比を，また Σ^*-Σ と Σ-Λ の質量差の適当な組み合わせを用いて独立に評価せよ．

***17.C.**　一つの c クォークと二個の軽いクォーク (u，d，s の色んな組み合わせ) からなるバリオン状態の質量スペクトルを半定量的に議論せよ．これを解くに当たっては，これらの束縛状態のいくつかについて何らかの実験的情報を知る必要があるだろう．また，この章のどの公式がこの文脈で信頼出来るものかについて考えることも必要である．

第18章

統一理論と $SU(5)$

素粒子物理学の標準模型の力を次の表に示す:

"既知の" 力

力	電磁力	弱い力	強い力	重力
及ぶ距離	∞	10^{-16} cm	10^{-13} cm	∞
強さ	$\frac{1}{137}$	$\approx \frac{1}{30}$	≈ 1	$\approx 10^{-38} \frac{E^2}{m_P^2}$
媒介粒子	光子	W と Z ボソン	グルーオン	重力子?
質量	0	$\approx 100 m_P$	0 又は $\approx m_P$	0

(m_P: 陽子質量)

重力は分離して書いた．もし我々が個々の粒子の物理にだけ興味があるなら重力については全く知らなかっただろうからである．我々が重力について知っているのは，莫大な数の粒子が集まって惑星や星となったものについて我々がいくらかの経験があるせいに過ぎない．

18.1 大統一

他の相互作用はどれもリー代数に結びついている．このことは，一つの単純リー群に基づく単一の基本理論の異なる側面として，全ての素粒子の相互作用を統一することが可能であるかもしれないことを示唆している．

この章では，全ての素粒子相互作用が単純リー群 $SU(5)$ に大変ぴったり当てはまることを見る．また，より大きな代数に基づく他の埋め込みについても議

論する．これらの理論は，**大統一理論** (grand unified theories; GUTs) と呼ばれるが，“大”(grand) の語ははっきりしない歴史的理由により加えられたものである．量子場の理論の言葉なしでは，これらの理論の構造の全てを議論することは出来ない．しかし，すくなくとも，大統一理論のリー代数の構造を詳しく示すことはできる．私は，これが群論の背後にある物理学のより完全な学習に向けて読者の興味をかき立てることになるよう私は願っている[1]．

我々はすでに，強い相互作用のカラー $SU(3)$ 理論を議論した．電弱相互作用の $SU(2) \times U(1)$ 理論はもう少し複雑である．ここではごく表面的な紹介をしよう．

18.2 パリティの破れ，ヘリシティ，右・左手型

弱い相互作用の特徴の一つは，パリティの非保存である．パリティは，全ての空間座標の符号を逆にする変換である．それは，(回転を除けば) 鏡映と等価である．電子やクオークのようなスピン 1/2 粒子は，それが動いている場合，運動方向のスピンの成分，すなわち**ヘリシティ** (helicity) により特徴付けられる．スピン 1/2 粒子の場合，ヘリシティは $\pm 1/2$ である．ヘリシティ $1/2$ を持つ粒子は**右手型** (right-handed)，ヘリシティ $-1/2$ を持つ粒子は**左手型** (left-handed)，と呼ばれる．自明ではないが，量子場の理論の基本原理から従う理由に依って，右手型粒子の反粒子は左手型であり，左手型粒子の反粒子は右手型である．ヘリシティ，あるいは右・左手型 (handedness)，はパリティ変換の下で不変でない．鏡映は右と左を交換するからである．よって，もしある相互作用が粒子の右手型および左手型成分に違ったふうに働くならば，その相互作用はパリティを破っている．弱い相互作用はこの例である．質量を持つ粒子は，(少なくとも，それが保存する粒子数を持つ限り) 左手型および右手型の両成分を持たねばならない．なぜなら質量を持つ粒子のヘリシティは相対論的に不変な量ではないからである．それは観測系に依存して符号を変える．よって，電子やそのより重い姉妹達のミューやタウ，そして全てのクォークは，左手型，右手型の両成分を持つ．しかし質量 0 の粒子は両方の成分を持つ必要はない．ニュートリノは非常に軽いことが知られており，我々の目的のためにはそれらは質量 0 とし

[1]次の文献を見よ．H. Georgi and S. L. Glashow, Phys. Rev. Lett. **32** (1974) 438.

て扱うことが出来る[2]．これまでの所，左手型ニュートリノ達と，それらの反粒子の右手型反ニュートリノ達しか観測されていない．

後に明らかになる理由により，状態よりも生成・消滅演算子の方の対称性の性質を記述するのが有用である．我々は最も軽い素粒子群，u，d クオークと電子とそのニュートリノ，の相互作用に話を限ろう．より重い粒子は皆これらのどれかのコピーのように振舞うからである．

弱および電磁相互作用の Glashow-Salam-Weinberg 理論は，生成・消滅演算子を $SU(2)\times U(1)$ リー代数の下でのテンソル演算子として扱う．この $SU(2)$ 生成子を R_a，$U(1)$ 生成子を S と記す．右手型粒子の生成演算子

$$u^\dagger,\quad d^\dagger,\quad e^\dagger,\quad \overline{u}^\dagger,\quad \overline{d}^\dagger,\quad \overline{e}^\dagger,\quad \overline{\nu}^\dagger, \tag{18.1}$$

を考えよう．これらは，それぞれ順に，右手型の u クォーク，d クォーク，電子，$\overline{u}$ 反クォーク，$\overline{d}$ 反クォーク，陽電子，反ニュートリノ，を生成する．クオークや反クォークのカラーの添字は，弱い相互作用では何の役割もしないので，今のところ省略した．これについては後に再び取り上げる．カラー $SU(3)$ は電弱 $SU(2)\times U(1)$ と交換する．$SU(2)$ 代数の下で，陽電子と反ニュートリノは 2 重項をなし，スピン 1/2 表現のように変換する．アイソスピンの下での陽子と中性子の生成演算子のように，これらの二つの生成演算子はテンソル演算子の第 1，第 2 成分と見なせる:

$$\overline{\ell}_1^\dagger=\overline{e}^\dagger,\qquad \overline{\ell}_2^\dagger=\overline{\nu}^\dagger. \tag{18.2}$$

同様に，$\overline{d}$，$\overline{u}$ 反クォーク達も $SU(2)$ の下で 2 重項として変換し，これらもテンソル演算子の成分

$$\overline{\psi}_1^\dagger=\overline{d}^\dagger,\qquad \overline{\psi}_2^\dagger=\overline{u}^\dagger. \tag{18.3}$$

として書くことが出来る．場 $\overline{\psi}$ は，またカラー $SU(3)$ の下で $\overline{3}$ のように振る舞うテンソル演算子でもある．が，今のところ $SU(3)$ 添字をあらわには書かなかった．

次に，これらの生成演算子の $SU(2)$ および $U(1)$ 生成子との交換関係は次のようになる:

[2] ニュートリノに微小な質量があることを示す多くの実験がある．ニュートリノは粒子数保存を破るような小さな質量を持ち得ることにも注意しておく．

$$
\begin{aligned}
&\left[R_a,\, u^\dagger\right] = 0\,, &&\left[S,\, u^\dagger\right] = 2u^\dagger/3\,;\\
&\left[R_a,\, d^\dagger\right] = 0\,, &&\left[S,\, d^\dagger\right] = -d^\dagger/3\,;\\
&\left[R_a,\, e^\dagger\right] = 0\,, &&\left[S,\, e^\dagger\right] = -e^\dagger\,;\\
&\left[R_a,\, \overline{\psi}_r^\dagger\right] = \overline{\psi}_s^\dagger\,[\sigma^a]_{sr}/2\,, &&\left[S,\, \overline{\psi}_r^\dagger\right] = -\overline{\psi}_r^\dagger/6\,;\\
&\left[R_a,\, \overline{\ell}_r^\dagger\right] = \overline{\ell}_s^\dagger\,[\sigma^a]_{sr}/2\,, &&\left[S,\, \overline{\ell}_r^\dagger\right] = \overline{\ell}_r^\dagger/2\,.
\end{aligned}
\tag{18.4}
$$

かくして場は全てテンソル演算子であり，$SU(2)$ の下で $\overline{\psi}^\dagger$ と $\overline{\ell}^\dagger$ は 2 重項として変換し，他は皆一重項として変換する．

右手型粒子に対する消滅演算子は，単に (18.1) の共役であり，それゆえ複素共役表現として変換する．特に，全ての S の値は符号を変える．左手型粒子の生成演算子は，対応する右手型反粒子の消滅演算子のように変換する．よって，例えば，左手型 u クォークの生成演算子は，右手型 $\overline{u}$ 反クォークの消滅演算子のように変換する．

(18.4) 式における S の値は，電荷演算子 Q が

$$
Q = R_3 + S\,. \tag{18.5}
$$

となるように決められており，次式を確かめることができる:

$$
\begin{aligned}
&\left[Q,\, u^\dagger\right] = 2u^\dagger/3\,, &&\left[Q,\, d^\dagger\right] = -d^\dagger/3\,,\\
&\left[Q,\, e^\dagger\right] = -e^\dagger\,, &&\\
&\left[Q,\, \overline{u}^\dagger\right] = -2\overline{u}^\dagger/3\,, &&\left[Q,\, \overline{d}^\dagger\right] = \overline{d}^\dagger/3\,,\\
&\left[Q,\, \overline{e}^\dagger\right] = \overline{e}^\dagger\,, &&\left[Q,\, \overline{\nu}^\dagger\right] = 0\,.
\end{aligned}
\tag{18.6}
$$

さて，電弱標準模型の基本的考え方は，QCD の場合と同様，リー代数の各々の生成子には力の粒子が対応しているということで，R_a には W_a $(a = 1, 2, 3)$ が，S には X が対応する．W_3 と X の一つの線形結合は電荷 Q に結合する光子である．よって電磁気学はこのより大きな理論に含まれることになる．他の三つの粒子，すなわち (複素結合 $W_1 \pm iW_2$ に対応する) $W^\pm$ と，(W_3 と X の光子に直交する線形結合の) Z，は，弱い相互作用を引き起こす粒子である．

18.3　自発的に破れた対称性

ここで何か奇妙なことが起こっている．$SU(2) \times U(1)$ は実際に対称性ではあり得ない．もし対称性であったとすれば，弱い相互作用は電磁相互作用と同じように長い到達距離を持つだろう．しかし実際は，弱い相互作用は大変短い到達距離で，その力の粒子 W および Z は質量を持つ．さらに，もし $SU(2) \times U(1)$ 対称性が破れずに残っているなら，クォーク達や電子は質量ゼロの粒子でなければならなかった．何故なら，弱い相互作用はそれらの粒子の左手型と右手型のヘリシティ成分を違うように扱うのだが，それが相対論と矛盾しないのは質量ゼロの粒子に対してだけだからである．ある新しい物理学が，クォークとレプトンに対し，さらに R_3 と X の一つの線形結合 (光子) 以外の全てに対し，理論の整合性を壊すことなしに，質量を与える．この物理とは何であろうか?

その答えは真空状態の構造である．$SU(2) \times U(1)$ 生成子はハミルトニアンと交換するが，世界の真空状態は $SU(2) \times U(1)$ 一重項ではない．それゆえ $SU(2) \times U(1)$ は物理的ヒルベルト空間の状態 (それらは皆その非対称な真空の上に構築されている) の上で良い対称性ではない．我々の真空の上では，クォークやレプトンや $W^\pm$ や Z は，零質量の光子と縮退しないのである．

このような状況は**対称性の自発的破れ** (spontaneous symmetry breaking) と呼ばれる．$SU(2) \times U(1)$ 対称性は電磁相互作用の $U(1)$ に自発的に破れている，と言われる．何故なら，唯一 $Q = R_3 + S$ の線形結合だけが我々の世界の真空状態を一重項として扱うからである．結果として生ずる理論は弱い相互作用と電磁相互作用の極めて良い記述を与えるのである．

18.4　対称性の自発的破れの物理学

ここで，この自発的な対称性の破れを引き起こすものがどんな新しい物理なのかについて説明することは理にかなったことであろう．ところが，悲しいかな，我々はこの新しい物理が何なのかについて未だ知らないのである．しかしながら，このプロセスの模型は存在し，その説明は容易で理解するに値するものである．これが Higgs 場の仮説である．**場** (field) とは，電磁気学における電場や磁場のように，時空の各点で定義される量である．電場や磁場は回転やローレンツ変換の下で非自明に変換するいくつかの成分を持っている．しかし，回

転やローレンツ変換の下で不変な**スカラー**場があると仮定しよう．そのような場は，回転対称性やローレンツ不変性を破らないで真空状態でゼロでない値を持つことが出来る．もしその場が $SU(2)\times U(1)$ の下で非自明な変換をするものならば，ゼロでない真空値は $SU(2)\times U(1)$ 対称性を自発的に破る．

$SU(2)\times U(1)$ 電弱理論においては，Higgs 場は $SU(2)$2 重項として変換し，$S=1/2$ を持つことでうまく働く．そのような場は，(ϕ と呼んで)

$$\left[R_a,\,\phi_r^\dagger\right]=\phi_s^\dagger\,[\sigma^a]_{sr}/2\,,\qquad \left[S,\,\phi_r^\dagger\right]=\phi_r^\dagger/2\,. \tag{18.7}$$

と変換する．そういう場が存在すれば，その自己相互作用は，ちょうど定数の ϕ 場に蓄えられるエネルギーである，ポテンシャル $V(\phi)$ で記述することが出来る．$V(\phi)$ は実際は，$SU(2)\times U(1)$ の下で不変なので，$\phi^\dagger\phi$ のみの関数である．最低エネルギー状態は $V(\phi)$ の最低値に対応する．ところが，その $V(\phi)$ の最低値で ϕ はゼロでない，ということもあり得る．最低値でゼロでない ϕ を持つポテンシャルの簡単な例は，$\lambda>0$ の

$$V(\phi)=\lambda\left(\phi^\dagger\phi-v^2\right)^2 \tag{18.8}$$

である．これは，$\phi^\dagger\phi=v^2$ のとき最小となる．この時，真空での ϕ の値として，例えば，

$$\phi_1=0\,,\qquad\qquad \phi_2=v\,. \tag{18.9}$$

をとることができる．(18.7) 式は，組み合わせ R_3+S が ϕ の真空値 (18.9) に作用したときゼロになることを示している．それゆえ，この $SU(2)\times U(1)$ の電磁気に対応する特別な部分群は，Higgs 場によって破られない，ということに注意したい．しかし，$SU(2)\times U(1)$ 生成子の他のどの組み合わせも，ϕ の真空値に作用した時ゼロにならず，それらの生成子が自発的に破れていることを意味している —— それらは物理的な真空を非物理的な真空状態に回す回転に対応する．破れない組み合わせの正確な形は，ϕ の真空値の特定の選び方 (18.9) に依る．しかし，$\phi^\dagger\phi=v^2$ を持つ他のどの選び方も，$SU(2)\times U(1)$ 変換で (18.9) に結びつけられるので，同じ物理を与える．それゆえ，破れない $U(1)$ 生成子に対して簡単な形 $Q=R_3+S$ を与える真空値 (18.9) を選ぶことに何ら問題はない．

Higgs 場は，電子やクォークが質量を得ることも可能にする．もし右手型粒子の表現と，対応する反粒子の表現とのテンソル積が Higgs 場やその複素共役の

表現を含んでいれば，Higgs 場はそういうスピン 1/2 粒子に対して質量を与えることができる，というのが規則である[3]．読者は，電子とクォークの場に対してそうなっていることを確かめることが出来るだろう．

18.5 Higgs は実在するのか？

$SU(2) \times U(1)$ 対称性が自発的に電磁気学の $U(1)$ に破れている，強，弱，電磁相互作用の $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 模型が，10^{-16} cm の短距離まで素粒子を素晴らしく良く記述している，ということに関しては圧倒的な証拠がある．しかしながら，Higgs 場が実際に存在するかどうかについて我々は未だ知らないということを指摘しておくことは重要である．それが，**同じ対称性を持った**何か他のダイナミクスの単なる数学的なメタファーであるということは大いにあり得る．ところが我々は，もし Higgs が実在しなかったとき，その対称性の破れを起こす何か他の新しいダイナミクスがあるのかどうかについて知らない．今日の素粒子物理学の最も重要な目標の一つは，Higgs 場を直接見るか，さもなくば，それを置き替える物理学を見つけることである．

18.6 統一と $SU(5)$

(18.4) の $SU(2) \times U(1)$ 対称性は，弱い相互作用と電磁相互作用の部分的統一である．それは我々の世界の物理の多くの顕著な特色を説明しないままに残している．その一つは電磁気の電荷の量子化である．水素原子は，非常な精度で電気的に中性であることが知られている．このことは，クォークの電荷と電子の電荷の間に関係があることを意味している．しかしながら，(18.5) 式は，我々の見る電荷を記述できてはいるが，それらを説明出来てはいない．問題は S 生成子である．R_3 の値は， 非アーベル $SU(2)$ 代数の非可換性のために量子化されている．しかし，S の値は全く勝手である．それらの値は，我々の見る量子化された電荷をうまく記述するように選ばれるのであるが，もし R_3 と S を一

---

[3]量子場の理論では，こうなっていれば Higgs 場と粒子の生成・消滅演算子を含む $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 不変な相互作用項 (それは Higgs 場が真空期待値で置き換えられれば質量項となる) を書くことが可能である．

つの単純代数に埋め込むことが出来れば，S の値は，R_3 の値と同様，代数の構造により制限されるのである．

この考え方が，1970年代初期の統一理論探究の主な動機であった．最初我々は，$SU(2)\times U(1)$ 電弱理論だけを統一する単純群を探した．しかしこの探索は徒労に終わった．興味ある統一はカラー $SU(3)$ を含めて初めてなし得たのであった．

で我々は問う，強い相互作用のカラー $SU(3)$ を含めて，さらに $SU(3)$ と $SU(2)\times U(1)$ を一つの大きな群 G に，$SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ へ自発的に破れる群 G に，統一することが可能なのかと．

一組の生成演算子 $a^\dagger_{xr}$ が，

$$\begin{aligned}\left[T_a,\,a^\dagger_{xr}\right] &= a^\dagger_{yr}\,[T^D_a]_{yx}\,,\\ \left[R_a,\,a^\dagger_{xr}\right] &= a^\dagger_{xt}\,[R^d_a]_{tr}\,,\\ \left[S,\,a^\dagger_{xr}\right] &= s\,a^\dagger_{xr}\,.\end{aligned} \tag{18.10}$$

を満たす場合，我々はそれを $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ の表現 $(D,d)_s$ として変換すると呼ぼう．よって，x は $SU(3)$ の表現 D に付随したカラー $SU(3)$ 添字であり，r は，$SU(2)$ の表現 d に付随する添字で，s は，S 量子数である．(18.10) と (18.5) は，s が単にその表現の平均電荷であることを意味する．というのは，各表現に対し，

$$\mathrm{Tr}\,Q = \mathrm{Tr}\,R_3 + \mathrm{Tr}\,S = \mathrm{Tr}\,S \tag{18.11}$$

だからである．(定理8.9により，あるいは等価だが，$SU(2)$ 表現が $R_3=0$ に関して対称であるために，R_3 のトレースは常にゼロである)．

我々は，全ての粒子のカラー $SU(3)$ 変換性を知っているので，(18.4) から，右手型粒子の生成演算子の表現を読み取ることが出来る:

$$\begin{gathered} u^\dagger:\ (3,1)_{2/3}\,,\qquad d^\dagger:\ (3,1)_{-1/3}\,,\qquad e^\dagger:\ (1,1)_{-1}\,,\\ \overline{\psi}^\dagger:\ (\overline{3},2)_{-1/6}\,,\qquad \overline{\ell}^\dagger:\ (1,2)_{1/2}\,.\end{gathered} \tag{18.12}$$

ここで，$SU(2)$ 表現はその次元で示した．右手型粒子の生成演算子の全 $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ 表現は，したがって

$$(3,1)_{2/3}\oplus(3,1)_{-1/3}\oplus(1,1)_{-1}\oplus(\overline{3},2)_{-1/6}\oplus(1,2)_{1/2}\,. \tag{18.13}$$

となる．左手型の場の生成演算子は，表現 (18.13) の複素共役として変換する:

$$(\overline{3},1)_{-2/3} \oplus (\overline{3},1)_{1/3} \oplus (1,1)_1 \oplus (3,2)_{1/6} \oplus (1,2)_{-1/2} . \tag{18.14}$$

ここで $SU(2)$ 表現は実であること，$\overline{2}=2$，を使った．(18.13) と (18.14) が同じではないこと，それゆえ，電弱 $SU(2)\times U(1)$ のパリティを破る習性のため表現が複素であること，に注意したい．

(18.13) は，統一代数を探すための出発点である．我々は，$SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ を部分代数として含み，かつその部分代数の下で (18.13) のように変換する表現を含むような代数 G を見つけたい．G は四つの交換する生成子 T_3，T_8，R_3，S を含むことになるから，G のランクは少なくとも 4 でなければならない．最も簡単な可能性は，ランク 4 の代数 $SU(5)$ を試して見ることである．後に我々は，他のランク 4 の単純代数は複素表現を持たず，よって複素表現 (18.13) を記述することが出来ない，ということを見る．

$SU(5)$ はもちろん 5 次元表現を持つ．5 は複素であるから，実際は二つあり，5 と $\overline{5}$ (あるいは [1] と [4]) は同値ではない．$SU(5)$ の $SU(2)\times U(1)$ 部分群で，5 表現が生成演算子のある 5 次元部分集合のように変換するものが見つけられるだろうか? そのような部分集合の唯一の可能性は

$$(3,1)_{-1/3} \oplus (1,2)_{1/2} . \tag{18.15}$$

である．他の 5 次元部分集合のとりかた

$$(3,1)_{2/3} \oplus (1,2)_{1/2} , \tag{18.16}$$

は，生成子 S がその上でトレースがゼロにならないので，うまくいかない．すなわち定理 8.9 により，この選び方に対しては，S は $SU(5)$ 生成子の一つになれない．

(18.15) を得るように $SU(5)$ に $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ を埋め込むのは簡単である．$SU(3)$ 生成子を 5 の最初の 3 成分にだけ作用するトレース 0 の行列にとり，

$$\begin{pmatrix} T_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \tag{18.17}$$

$SU(2)$ 生成子は最後の 2 成分に作用するトレース 0 行列にとる:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_a \end{pmatrix} \tag{18.18}$$

そうすると S は，(18.17) と (18.18) の両方と交換する生成子

$$\begin{pmatrix} -I/3 & 0 \\ 0 & I/2 \end{pmatrix} \tag{18.19}$$

である．よって，生成演算子 $d^\dagger$ および $\bar{\ell}^\dagger$ は，$SU(5)$ の 5 表現 $\lambda_j^\dagger$ に次のように入れられる:

$$\begin{aligned} &\lambda_x^\dagger = {d_x}^\dagger\,,\ (\ x = 1, \cdots, 3)\,; \\ &\lambda_4^\dagger = \bar{\ell}_1^\dagger = \bar{e}^\dagger\,, \\ &\lambda_5^\dagger = \bar{\ell}_2^\dagger = \bar{\nu}^\dagger\,, \end{aligned} \tag{18.20}$$

(18.13) の残りはどうだろうか．残っているのは，$u^\dagger$，$e^\dagger$，$\overline{\psi}^\dagger$ で，

$$(3,1)_{2/3} \oplus (1,1)_{-1} \oplus (\overline{3},2)_{-1/6}\,. \tag{18.21}$$

と変換する．この表現は 10 次元である．$SU(5)$ は，10 と $\overline{10}$ ([2] と [3]) 表現を持つ．10 は，二つの 5 の反対称テンソル積であるので，それが $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 部分群の下でどう変換するのかは，(18.15) のそれ自身との反対称積をとることによって決定できる (これが 13 章で説明した一般則を使うのと等価であることは容易に確かめられる)．$SU(3)$ と $SU(2)$ 表現は通常の方法で合成できる．S 量子数は単に加えれば良い．よって，

$$\begin{aligned} &\left[(3,1)_{-1/3} \oplus (1,2)_{1/2}\right] \otimes \left[(3,1)_{-1/3} \oplus (1,2)_{1/2}\right]_{AS} \\ &\quad = \left[(\overline{3},1)_{-2/3} \oplus (1,1)_1 \oplus (3,2)_{1/6}\right]\,. \end{aligned} \tag{18.22}$$

これはちょうど，表現 (18.21) の複素共役である．よって実際欲しいものは $\overline{10}$ 表現であり，残りの右手型フェルミオンの生成演算子を二つの反対称な上付き添字を持つ $SU(5)$ 表現 $\xi^{jk\,\dagger} = -\xi^{kj\,\dagger}$ として次のように書くことができる:

$$\begin{aligned} &\xi^{ab\,\dagger} = \epsilon^{abc}\,u_c^\dagger\ \ (\ a,b,c = 1, \cdots, 3)\,, \\ &\xi^{a4\,\dagger} = {\overline{\psi}_2^{\,a}}^\dagger = \overline{u}^{\,a\,\dagger}\ \ (\ a = 1, \cdots, 3)\,, \\ &\xi^{a5\,\dagger} = {\overline{\psi}_1^{\,a}}^\dagger = \overline{d}^{\,a\,\dagger}\ \ (\ a = 1, \cdots, 3)\,, \\ &\xi^{45\,\dagger} = e^\dagger\,. \end{aligned} \tag{18.23}$$

これが標準的な $SU(5)$ 模型で，$5 \oplus \overline{10}$ として変換する右手型粒子の生成演算子，あるいは同じことだが，$\overline{5} \oplus 10$ として変換する左手型粒子の生成演算子を持つ．この模型に関し最も興味あることは全てがうまくフィットすることである．

18.7 $SU(5)$ を破る

$SU(5)$ 対称性の自発的破れを議論する際には，取り組むべき二つの課題がある．

1. 対称性は $SU(5)$ から $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ へどのように破れるのか?
2. クォークとレプトンはどのように質量を得るのか?

Higgs 場の言葉でこれらに答えよう．

$SU(5)$ の $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ への破れの問題に対しては大変簡単な解がある．それは実は，$SU(3)$ がアイソスピンとハイパーチャージの $SU(2) \times U(1)$ へ破れる場合の Gell-Mann の解に極めて似たものである．随伴表現での S 生成子は，Higgs 場の真空期待値に対して望まれる性質を全て持っている．ちょうど $SU(3)$ の随伴表現におけるハイパーチャージ生成子がアイソスピンとハイパーチャージと交換したように，$SU(5)$ の随伴表現における $U(1)$ 生成子 S は $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ と交換する．したがって，S 方向に[4]真空期待値を持つ 24 表現は，$SU(5)$ を $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ へ破る Higgs 場として良い選択である．

Higgs 場が $SU(5)$ 理論におけるフェルミオンに直接質量を与えるためには，満たすべき条件が二つある[5]．Higgs の表現 (あるいはその複素共役) がフェルミオンとその反フェルミオンの属する $SU(5)$ 表現のテンソル積中に現れなければならない．さらに，Higgs の表現は $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ の下で $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 模型の Higgs 場のように変換する成分を持たねばならない．

右手型陽電子 ($\overline{e}$) と d クォークの場は 5 に入っているが，それらの反粒子の電子と $\overline{d}$ の場は $\overline{10}$ に入っている．$SU(5)$ で，$5 \otimes \overline{10}$ は $[1] \otimes [3] = [4] \oplus [3,1]$，すなわち $\overline{5} \oplus \overline{45}$ である (問題 13.B 参照)．

[4] $SU(2) \times U(1)$ を破る Higgs2 重項の場合の状況とは違って，$SU(5)$ の随伴表現には，物理的に等価でない期待値の方向がある．S 方向が一つの可能な真空値であることを示すことが出来る．

[5] より複雑な，量子力学的 “ループ” 効果を含む間接的な機構も可能であるが，ここでは議論しない．

(18.15)から，$\mathbf{5}$が$SU(3)\times SU(2)\times U(1)$模型のHiggs場のように変換する成分 —— $(1,2)_{1/2}$を含むことを確かめることができる．$\mathbf{45}$も同じく望みの成分を持つことが確かめられる(問題18.E参照).

かくして電子とdクォークの質量は，二つのHiggs表現$\mathbf{5}$または$\mathbf{45}$のどちらかから出て来ることが可能である.

右手型uと$\overline{u}$は共に$\overline{\mathbf{10}}$表現に入っており，

$$[3]\otimes[3]=[1]+[4,2]+[3,3]=\mathbf{5}+\mathbf{45}+\mathbf{50} \tag{18.24}$$

である．我々は既に$\mathbf{5}$あるいは$\mathbf{45}$の$SU(5)$ Higgs場が，どちらも$SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ Higgs場として働く適切な成分を持つことを知っているので，それらはuクォークに質量を与えられる．しかしながら，$\mathbf{50}$表現は$SU(3)\times SU(2)\times U(1)$の下で$(1,2)_{\pm 1/2}$のように変換する成分を持たない(問題18.E参照)．したがってこの表現はuクォークに質量を与えるのには役立たない.

18.8 陽子崩壊

$SU(5)$理論に関してもう一つ魅力的な点は，クォーク，反クォーク，電子が全て同じ既約表現に属していることである．このため，$SU(5)$相互作用のあるものはバリオン数を保存しない．したがって$SU(5)$統一は陽子崩壊を導く．陽子は極めて長寿命である．しかし，$\mathbf{24}$ Higgs場の真空期待値が極めて大きいと陽子崩壊を起こす相互作用は短距離となり陽子の中の二つのクォークが陽子崩壊を引き起こす確率は大変小さくなる．カラー$SU(3)$と電弱$SU(2)$と$U(1)$の力の間の観測されている違いを説明するために，$\mathbf{24}$ Higgs場の真空値がどのくらいでなければならないかを，我々はおおよそ知っている，ということがわかる．[6] したがって陽子崩壊の速度は与えられた$SU(5)$模型で実際予言することが出来る．$SU(5)$は最初理論的に見つけられたので，実験家たちはますます感度の良い実験で陽子崩壊を探したが，これまでのところ見つかっていない．実際のところ，$SU(5)$統一理論の最も簡単なバージョンはこれらの実験でかなりの確度で除外された．しかし少し凝ったバージョンの$SU(5)$理論は，とくに超対称バージョンは，依然として極めて有望である.

[6]これは群論だけを使って理解できることではない．それはダイナミクスを含む.

問題

18.A. 対称性が (18.7) の Higgs 場で破られる $SU(2) \times U(1)$ 模型において，電子と u と d クォークに対する質量項が許されることをあらわに確かめよ．**ヒント:** ページ 238 の議論を見よ．

18.B. (18.15) とそれ自身との対称なテンソル積を求めよ．

18.C. (18.21) に対しても同じことをせよ．

18.D. u，d をクォーク消滅演算子として，演算子

$$O = \bar{e}^{\dagger} \epsilon^{abc} u_a u_b d_c$$

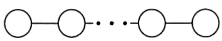
を考える．演算子 O がハミルトニアンに現れるとすれば，それが陽子を π^0 と陽電子に崩壊させるのにちょうどの電荷とカラーの性質を持つことを示せ．

18.E. $SU(5)$ の 45 ([4,2]) と 50 ([3,3]) は $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 部分群の下でどう変換するか? ヒント: 複素共役表現に対する問題に答える方が易しいかも知れない．それからその複素共役を取れ．

第 19 章

古典群

四組の単純リー代数の無限系列が存在し，古典群と呼ばれるものを生成する．これらの最初の系列は，すでに学習してきた $SU(N)$ 代数である．その Dynkin 図形は次の形を持つ．



(19.1)

ランク n の代数 $SU(n+1)$ は，これらを最初に分類した Cartan により A_n と呼ばれた．この短い章では，完全な分類をする前に，他の古典群をごく軽く議論しておこう．それぞれについては後に詳しく議論する．

19.1 $SO(2n)$ 代数

$2n \times 2n$ 直交行列は，$2n$ 次元の実空間における回転の群をなす．この群の生成子は，純虚反対称 $2n \times 2n$ 行列であり，$n(2n-1)$ 個独立である．Cartan 生成子は次のように選ぶことができる:

$$[H_m]_{jk} = -i(\delta_{j,2m-1}\,\delta_{k,2m} - \delta_{k,2m-1}\,\delta_{j,2m}) \tag{19.2}$$

これは，$2n$ 次元の空間を，異なる Cartan 生成子が作用する n 個の異なる 2 次元部分空間に分解する，ということを意味する．H_m は，適当な 2 次元空間で小さなパウリ行列 σ_2 で，それ以外は全てゼロ，の行列である．σ_2 の固有値は

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} = \pm 1 \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} \tag{19.3}$$

で与えられる．よって H_m の固有ベクトルは

$$[|\pm e^k\rangle]_j = \delta_{j,2k-1} \pm i\,\delta_{j,2k} \tag{19.4}$$

で，

$$H_m \left|\pm e^k\right\rangle = \pm\delta_{km} \left|\pm e^k\right\rangle \tag{19.5}$$

を満たす．したがって，ウェイトベクトルは ± 単位ベクトル e^k であり，単位ベクトルは成分

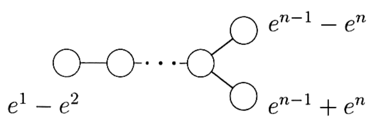
$$[e^k]_m = \delta_{km} \tag{19.6}$$

を持つ．(いつものように，生成子の働く空間と，ウェイトベクトルの住む Cartan 空間とを混同してはいけない．)

ルートは一つの部分空間を別のものにあらゆる仕方で結びつけるので，ルートベクトルは次のようになる．

$$\begin{array}{lll} \text{ルート} & \pm e^j \pm e^k & (j \neq k) \\ \text{正ルート} & e^j \pm e^k & (j < k) \\ \text{単純ルート} & e^j - e^{j+1} & (j = 1 \ldots n-1) \\ & \text{および} & e^{n-1} + e^n \end{array} \tag{19.7}$$

Dynkin 図形は



(19.8)

となる．代数 $SO(2n)$ は Cartan により D_n と呼ばれた．

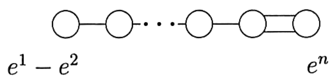
19.2 $SO(2n+1)$ 代数

$2n+1$ 次元空間の場合には，2 次元部分空間が n 個見つけられるが，あと 1 次元部分空間が残ってしまう．したがって，純虚反対称な $(2n+1) \times (2n+1)$ 行列で生成される $2n+1$ 次元空間の回転群に対して，Cartan 生成子は前と同じに選ぶことが出来，k 番目の 2 次元部分空間のベクトルに対応する $\pm e^k$ の形のウェイトがある．一方，余分な 1 次元に付随して 0 ウェイトも一つある．前と全く同様，様々な 2 次元部分空間をつなぐルートがあり，$SO(2n)$ におけるのと同じ形のルートである．さらにここでは，余分な 1 次元部分空間と他の 2 次元

部分空間とをつなぐルート，$\pm e^j$ がある．したがって，ルートは

$$
\begin{array}{lll}
\text{ルート} & \pm e^j \pm e^k \quad (j \neq k)\ \text{および} \quad \pm e^j & \\
\text{正ルート} & e^j \pm e^k \quad (j < k)\ \text{および} \quad e^j & \\
\text{単純ルート} & e^j - e^{j+1} \quad (j = 1 \ldots n-1) & \\
 & \text{および} \quad e^n &
\end{array}
\tag{19.9}
$$

となる．ルート $e^{n-1} + e^n$ は，$SO(2n+1)$ の場合 $e^{n-1} - e^n$ に e^n を2回足せば得られるので，単純ルートではない．Dynkin 図形は



(19.10)

この代数 $SO(2n+1)$ は Cartan により B_n と呼ばれた．

19.3 $Sp(2n)$ 代数

最後に，2×2 行列と $n\times n$ 行列のテンソル積で与えられる次の形をした $2n\times2n$ 次元エルミート行列を考えよう:

$$
1 \otimes A\,, \qquad \sigma_1 \otimes S_1\,, \qquad \sigma_2 \otimes S_2\,, \qquad \sigma_3 \otimes S_3 \tag{19.11}
$$

ここで，σ_a はパウリ行列，A は反対称 $n \times n$ 行列，S_1，S_2，S_3 は対称 $n \times n$ 行列である．これらがパウリ行列の性質のために交換関係の下で閉じていることは簡単に確かめられる．部分集合

$$
1 \otimes A\,, \qquad \sigma_3 \otimes S_3 \tag{19.12}
$$

は，トレース0の S_3 に対して，次の形の $Sp(2n)$ の部分代数 $SU(n)$ を生成する:

$$
\begin{pmatrix} T_a & 0 \\ 0 & -T_a^* \end{pmatrix} \tag{19.13}
$$

この行列は，ν^j と $-\nu^j$ をウェイトとする $SU(n)$ の可約な表現 $n \oplus \overline{n}$ を生成する．ただし ν^j は (13.9) で定義されたベクトルである．我々の Cartan 部分代数の最

初の $n-1$ 個の元はこの $SU(n)$ 部分群の Cartan 部分代数，$H_1, H_2 \ldots H_{n-1}$，と とることにする．Cartan 部分代数の最後の元は，そのとき，

$$H_n = \sigma_3 \otimes I/\sqrt{2n} \tag{19.14}$$

$SU(n)$ 部分代数の全ての生成子は H_n と交換するので，部分代数のルートは $H_n = 0$ (の固有値) を持つ．他の成分が $SU(n)$ のルートベクトル $\nu^j - \nu^k$ によって与えられることは既に知っている．他のルートは

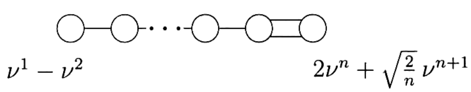
$$[S_{k\ell}]_{ij} = (\delta_{ik}\,\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\,\delta_{jk}) \tag{19.15}$$

を用いて，$(\sigma_1 \pm i\sigma_2) \otimes S_{k\ell}$ と書かれる行列に対応し，$H_n = \pm\sqrt{2/n}$ と $H_m = \pm[\nu^k + \nu^\ell]_m$ を持つ．

これはかなり馬鹿なルートの書き方であるというべきである．後に，$Sp(2n)$ についてもっと詳しく語るときに，これらの関係がもっと明白になる良い記法を導入する．ともかく，ν^{n+1} を全ての ν^j $(j = 1, \cdots, n)$ と直交する単位ベクトルととれば，ルートは次のように書ける:

$$\begin{array}{lll}
\text{ルート} & \nu^j - \nu^k & (j \neq k) \\
& \text{および} & \pm\left(\nu^j + \nu^k + \sqrt{\frac{2}{n}}\,\nu^{n+1}\right) \\
\text{正ルート} & \nu^j - \nu^k & (j < k) \\
& \text{および} & \left(\nu^j + \nu^k + \sqrt{\frac{2}{n}}\,\nu^{n+1}\right) \\
\text{単純ルート} & \nu^j - \nu^{j+1} & (j = 1 \ldots n-1) \\
& \text{および} & \left(2\nu^n + \sqrt{\frac{2}{n}}\,\nu^{n+1}\right)
\end{array} \tag{19.16}$$

Dynkin 図形は



(19.17)

で，$SU(n)$ のルートは短い方である．$Sp(2n)$ 代数は Cartan により C_n と呼ばれた．

19.4 4元数

古典群について有用な考え方は，様々な空間での回転群として捉えることである．明らかに，$SO(N)$ は実数の N 次元空間における回転の群である．群の生成子 X は，定義表現において，純虚である．指数に乗せて群の表現が得られる積 iX は，完全に実で反対称である．同様に，$SU(N)$ は複素 N 次元空間における "回転" の群である．定義表現における iX の実部は反対称であり，$SU(N)$ の $SO(N)$ 部分群を生成する．iX の虚部は対称でトレースがゼロである．

最後に，$Sp(2N)$ は **4元数** (quaternion) の N 次元空間における回転の群と考えることが出来る．その元は次の形をした対象—4元数である:

$$B + \vec{j} \cdot \vec{C} \tag{19.18}$$

ここで，B，$\vec{C} = (C_1, C_2, C_3)$ は実数で，$\vec{j}$ の成分は，次式を満たす4元数単位である．

$$j_a j_b = -\delta_{ab} + \epsilon_{abc} j_c \tag{19.19}$$

したがって N 次元4元数空間におけるベクトルは

$$Q \equiv \begin{pmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^1 + \vec{j} \cdot \vec{C}^1 \\ \vdots \\ B^N + \vec{j} \cdot \vec{C}^N \end{pmatrix} \tag{19.20}$$

のような形である．この言葉では，iX は 一つの反対称部分 iA，プラス三つの独立な，4元数単位に比例する "複素" 対称成分

$$j_1 S_1\,, \quad j_2 S_2\,, \quad j_3 S_3\,, \tag{19.21}$$

を持つので，結局 iX は次の形を持つ．

$$iA\,, \quad j_1 S_1\,, \quad j_2 S_2\,, \quad j_3 S_3\,. \tag{19.22}$$

$Sp(2N)$ の4元数による記述と (19.11) との関連を見るため，4元数単位 $\vec{j}$ がパウリ行列の $-i$ 倍と等価であることに注意しよう．

$$\vec{j} \to -i\vec{\sigma}\,, \tag{19.23}$$

それゆえ，(19.21) は (19.11) においてパウリ行列に比例している項と関連している．$2N$ 次元空間における $Sp(2N)$ 変換が4元数回転と等価であることを見る

ため，4元数の N 次元空間を単純にパウリ行列に置き換えて作ってみよう．そうすると4元数 N-ベクトルは，次の形の $2N\times 2$ 行列になる:

$$Q \to \begin{pmatrix} B^1 - i\vec{\sigma}\cdot\vec{C}^1 \\ \vdots \\ B^N - i\vec{\sigma}\cdot\vec{C}^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^1 - iC_3^1 & -C_2^1 - iC_1^1 \\ C_2^1 - iC_1^1 & B^1 + iC_3^1 \\ \vdots & \vdots \\ B^N - iC_3^N & -C_2^N - iC_1^N \\ C_2^N - iC_1^N & B^N + iC_3^N \end{pmatrix} \tag{19.24}$$

(19.24) の第一列によって定義される複素 $2N$-ベクトルへの (i 倍の) $Sp(2N)$ 生成子の作用は，(19.24) への (19.22) の作用と等価である．

この構成がうまく行っているのは，実数と複素数と4元数が大変重要な性質を共有しているおかげである．先ず第一に，絶対値 $|z|$ が，

$$|z_1\, z_2| = |z_1|\,|z_2| \qquad\qquad |z| = 0 \Rightarrow z = 0 \tag{19.25}$$

という性質を持つよう定義できる．実数と複素数の時にこれがどのように成立しているかは良く知っている．4元数に対しては絶対値は

$$\left|B + \vec{j}\cdot\vec{C}\right| \equiv \sqrt{B^2 + \vec{C}^{\,2}} \tag{19.26}$$

である．これが

$$\left|B + \vec{j}\cdot\vec{C}\right|^2 = \left(B - \vec{j}\cdot\vec{C}\right)\left(B + \vec{j}\cdot\vec{C}\right) = \left(B + \vec{j}\cdot\vec{C}\right)^*\left(B + \vec{j}\cdot\vec{C}\right) \tag{19.27}$$

を満たすことに注意せよ．ここで，複素共役は通常のように虚数部分 (この場合三つ全て) の符号を変えることとと定義する．

これらの性質を持つ絶対値の存在は N 次元4元数ベクトル空間上に自然なノルムが定義されることを意味する:

$$||Q||^2 = \sum_{j=1}^{N} |q^j|^2 \tag{19.28}$$

$Sp(2N)$ は，4元数空間の構造を保ちながら，このノルムを保存する回転のなす群である．

古典群に対して他の可能性が何故ないのか疑問に思うかも知れない．その理由は (19.25) を満たすことがそんなに容易でない，ということである．この条件

は，加，減，乗，(0 以外による) 除，の演算がすべて無矛盾に定義できるという要求と一緒にすれば，**多元体** (division algebra) と呼ばれる構造を定義する性質である．そのような構造が他にもう一つだけあり，七つの虚数単位を持つ 8 元数 (octonion) であるが，我々は 27 章でそれをさらに議論する．残念ながら 8 元数の掛け算則は，結合的 (associative) でなく，それゆえ一般に 8 元数空間における回転は群をなさない．しかしながら，どの古典群にも収まらない風変わりなリー代数達は，みな 8 元数に何かにつけ関連している．我々は代数 G_2 を既に見たが，27 章でこれらの奇妙な代数のいくつかを議論する．

問題

19.A.　σ，τ，η を独立なパウリ行列の組として，36 個の行列

$$\sigma_a\,,\quad \tau_a\,,\quad \eta_a\,,\quad \sigma_a\tau_b\eta_c$$

を考える．これらの行列がリー代数をなすことを示し，そのルート，単純ルート，Dynkin 図形を見出せ．この代数は何であるか?

19.B.　σ，τ，η を独立なパウリ行列の組として，28 個の行列

$$\sigma_a\,,\quad \tau_a\,,\quad \eta_3\,,\quad \sigma_a\eta_1\,,\quad \sigma_a\eta_2\,,\quad \tau_a\eta_1\,,\quad \tau_a\eta_2\,,\quad \sigma_a\tau_b\eta_3\,.$$

を考えよう．これらの行列がリー代数をなすことを示し，そのルート，単純ルート，Dynkin 図形を見出せ．この代数は何か?

第 20 章

分類定理

これから Dynkin の議論に従い全ての単純リー代数を分類する．我々は，マスター公式 (6.36) に基づく簡単な解析幾何学的議論を用いてこれを行う．数学者は多次元空間における議論の意味を目に見えるように思い描くことが出来るのかも知れない．私には出来ない．ところが，解析的議論は十分に簡単なのである．

20.1 Π-系

我々は任意の単純リー代数の単純ルートが次の性質を持つことを見た:

A. それらは線形独立なベクトルである．

B. α と β が異なる単純ルートなら，$2\alpha\cdot\beta/\alpha^2$ は非正の整数である．

A と **B** を満たすルートの系が単純リー代数を与えることを保証するには，もう一つの条件が必要である:

C. 単純ルートの系は**分解不可能である．**

ルート系は，もし互いに直交する二つの部分系に分離できるなら，**分解可能** (decomposable) といわれる．分解可能でない場合，系は (もちろん) **分解不可能**である．

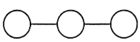
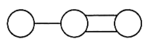
分解可能な単純ルートの系に対して，その直交する二つの部分系の単純ルートは互いに可換 (p と q が全ての対に対しゼロ) で，ルートの全系が二つの可換な部分系に分離する，ということは容易にわかる．各々の部分系は，それが張る

部分空間に付随したCartan生成子と共に，一つの不変部分代数を成す．分解可能なルート系に付随する群は，単純群ではない．それは**半単純** (semi-simple) 群，すなわち，アーベル不変部分群を含まない群，である．二つの部分代数が互いに交換するので，それらの生成する部分群も交換する．このような二つの可換な部分群 G_1，G_2 からなる群は二つの部分群の**直積** (direct product)，$G = G_1 \times G_2$，と呼ばれる．初等的な例は，問題8.Bでやった代数であるが，そこではDynkin図形は，$SU(2) \times SU(2)$ 群に付随した，二つの離れた白丸からなっていた．半単純リー群はすべていくつかの単純リー群の直積である．

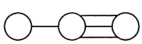
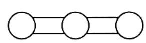
Dynkinは，**A**，**B**，**C**を満たすベクトルの系をΠ-系 (Π-system) と呼ぶ．単純リー代数を分類するためにやらねばならないことは，可能なΠ-系を分類することだけである．これは単なる幾何学である．我々はDynkin図形からベクトルの系を (約束事の規格化を除いて) 構成できることを知っている．我々は，"Π-系" という言葉を，ベクトルの系にも，それが表すDynkin図形にも，共通に使うことにする．Dynkin図形の言葉では，**B**は自動的である．図形は単にその整数を示しているからである; **C**は，図形がどの線も切らずに二つの図形に分離できないという性質である; **A**は，すべての単純ルートが正である条件と等価である．実際，その条件から我々は**B**が満たされるとき線形独立性が導かれることを示した．

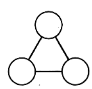
これからいくらか幾何学をやろう．

補題 1. 三つのベクトルから成るΠ-系は，次の二つしかない:

 および  (20.1)

これは，任意の三つの線形独立なベクトルの間の角度の和は360°より小さいという簡単な事実から従う．Π-系における可能な角度は，90°，120°，135°，150°のみである．分解不可能性から90°の角度は一つしか許されない．それゆえ，上の二つの場合だけが可能である．後に我々は，**B**と**C**を満たすが**A**を満たさない重要な系があることを見る:

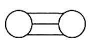
 および  (20.2)

および 

これらは，角度の和が 360° になっているので三つのベクトルが同一平面上にのり，線形独立でないため **A** を満たさないのである．

実際，**補題 1** は信じがたいほど強い制約である．というのは，Dynkin 図形から白丸の任意の部分集合をとってきても，また別の一つの Dynkin 図形を与えるからである．何故なら，長さも角度も変わらず，(**B** のために) ベクトルの部分集合もまた線形独立でなければならないからである．それゆえ，Π-系の任意の分離不可能な部分系は，また一つの Π-系である．したがって，任意の Π-系における任意の三つのつながったベクトルは，(20.1) の二つの配位のどちらかでなければならない．

この補題の大変簡単な系として，三つ以上のベクトルを持つ Π-系の中には三本線が現れ得ない，ことが従う．よって三本線を含む唯一の Π-系は，


(20.3)

である．これは代数 G_2 に対応している．

補題 2. ある Π-系が一本線でつながれた二つのベクトルを含むとき，その一本線の長さを 0 に縮め二つのベクトルを融合させて一つの丸にして得られる図形は，また一つの Π-系である．

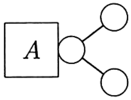
その二つのベクトルを α と β，それ以外のその Π-系の全てのベクトルの集合を Γ と呼ぼう．**補題 1** により，Γ には α と β の両方につながっているベクトルは存在しない．よって，あるベクトル γ が α につながっていれば，$\gamma \cdot \beta = 0$ であり，γ が β につながっていれば，$\gamma \cdot \alpha = 0$ である．$\alpha + \beta$ が α や β と同じ長さを持っていることも知っている．それゆえ，

$$
\begin{aligned}
&\gamma \in \Gamma \text{ が } \alpha \text{ につながったベクトルなら，} \\
&\quad \gamma \cdot (\alpha + \beta) = \gamma \cdot \alpha, \\
&\gamma' \in \Gamma \text{ が } \beta \text{ につながったベクトルなら，} \\
&\quad \gamma' \cdot (\alpha + \beta) = \gamma' \cdot \beta,
\end{aligned}
\tag{20.4}
$$

であるから，$\alpha + \beta$ と Γ の集合は縮減された Π-系となる．

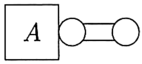
補題 2 は，二つの重要な系を持つ．**a.** どの Π-系も二本線を 2 ケ所以上含むことはない; また，**b.** どの Π-系も閉じたループを含まない．どちらの配位も縮めてゆけば，**補題 1** と矛盾する配位に帰着するからである．

補題 3. 次の配位



(20.5)

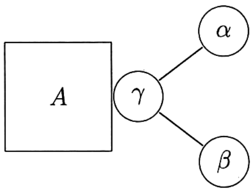
が，ある部分図形 A に対し Π-系であるなら，



(20.6)

もまた Π-系である．

これを見るためベクトルを次のようにラベルしよう:



(20.7)

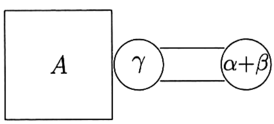
我々は $\alpha \cdot \beta = 0$ および

$$\begin{aligned} \frac{2\alpha \cdot \gamma}{\alpha^2} &= \frac{2\alpha \cdot \gamma}{\gamma^2} \\ = \frac{2\beta \cdot \gamma}{\beta^2} &= \frac{2\beta \cdot \gamma}{\gamma^2} = -1 \end{aligned} \tag{20.8}$$

を知っているが，これらより次式が出る．

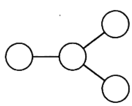
$$\begin{aligned} \frac{2\gamma \cdot (\alpha + \beta)}{\gamma^2} &= -2 \\ \frac{2\gamma \cdot (\alpha + \beta)}{(\alpha + \beta)^2} &= -1 \end{aligned} \tag{20.9}$$

それゆえ，次の図は縮減 Π-系の Dynkin 図形である:



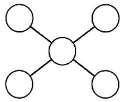
(20.10)

この補題の系として，Π-系において唯一可能な枝分かれは，一つの中心の丸から三つの一本線が出る形

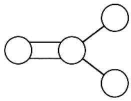


(20.11)

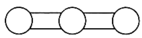
のみである，ことが従う．なぜなら，もっと多く枝分かれしている


(20.12)

のような場合や，二本線を持つ


(20.13)

のような図は，この補題により縮められて

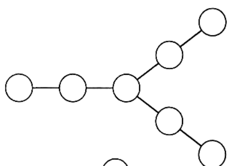

(20.14)

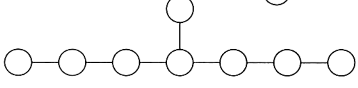
の形に出来るが，これは**補題 1.** によりΠ-系ではないからである．

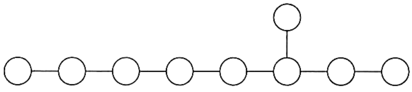
同様に，どのΠ-系も，枝分れと二本線の両方を，もしくは枝分れを2ケ所，含むことはできない．

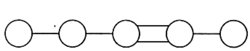
以上が一般的な定理を用いて言えることのすべてである．我々は，ここでいくつかの特異な特殊ケースを考えなければならない．後でわかるように，これらは，(前の章で議論した無限系列の群のどれにも入らないことを意味する) 例外群と呼ばれるものに付随している．

補題 4. どのΠ-系も，次のどの図形も含むことはできない:


(a)


(b)


(c)

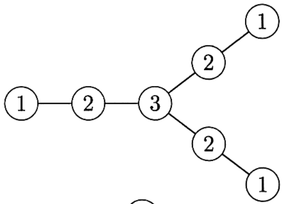

(d)

これらはすべて線形独立性を満たすことが出来ない．実際，これらの図形の中のベクトルを α^j としたとき，和が

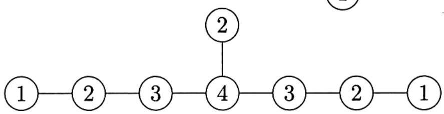
$$\left(\sum_j \mu_j \, \alpha^j\right)^2 = 0 \tag{20.15}$$

を満たすような，ある係数の組 μ_j を見つけることができる．

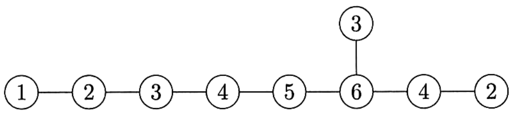
この係数 μ_j の適切な値は，下図のそれぞれの白丸の中に記した:



(*a*)

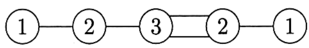


(*b*)



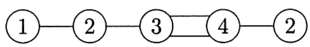
(*c*)

(*d*) の場合，ベクトルは皆が同じ長さではない．右側の二つのベクトルは，他のものより $\sqrt{2}$ 倍だけ，長い場合と，短い場合がある．長い場合は，



(*d*)

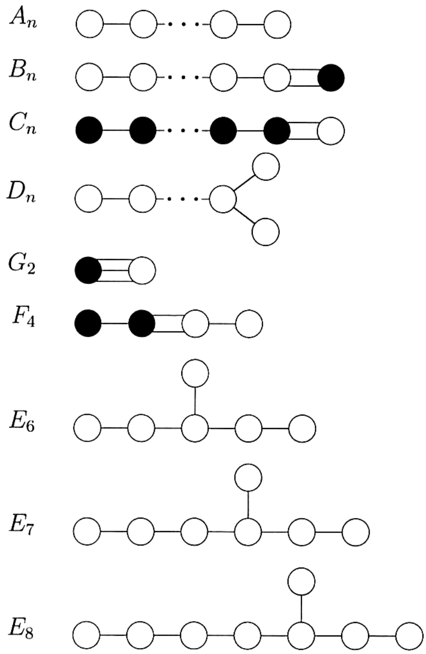
を用い，短い場合は次を用いる．



(*d*)

後に我々は，これらすべての図が線形従属なベクトルで構成出来ることを見るだろう．

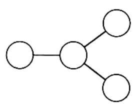
今や我々は，分類定理を完成するために十分な情報を持っている．すべての Π-系は，四つの無限系列のうちの一つか，もしくは五つの例外的図形の一つ，に属さねばならない．これらすべてを以下に示す．ただし，短い方のベクトルは黒丸で示した．



(20.16)

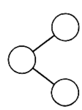
これら以外に許される図形はない．他の図形は皆，上で議論した幾何学的制約のどれかに抵触する．他の無限系列も存在しない．B_n や C_n の二本線の向こう側にもっと白丸を加えることは，F_4 を除いて，(d) と矛盾する．D_n の枝分かれを越えて枝を伸ばしてゆくことは，E_j の例外群を除いて，(a)，(b)，(c) の制限と抵触する．そして我々は G_2 が三本線を持つ唯一の図形であることを知っていた．

代数間のいくつかの同型関係について注意しよう．A_1，B_1，C_1 は皆一つの白丸から成る，よって皆代数 $SU(2)$ を記述する．加えて，$B_2 = C_2$ である．D_n の無限系列は少し風変わりである．n が小さくなるにつれて，白丸が左から順に消されてゆく．D_4 は，



(20.17)

ような形なので，D_3 は



(20.18)

に退化し，よって $D_3=A_3$ である．さらに，D_3 から D_2 を得るべくもう一つ白丸を消せば，それはつながっていない二つの白丸に分離する (D_n 系列にとどまるためには真ん中の丸を消さねばならない)．よって D_2 は単純群ではない．これは，$SO(4)$ 代数が $SU(2)\times SU(2)$ と同じである (問題 8.B) という (重要な) ことを言っている．

これらは，そのように代数が一致する場合の完全なリストである．他は全て異なる代数である．

20.2 正則部分代数

単純リー代数 A の**正則部分代数** (regular subalgebra) R とは，R のルートが A のルートの部分集合で，かつ R の Cartan 部分代数の生成子がすべて A の Cartan 生成子の線形結合になっているような部分代数のことである．このとき，R のランクが A のランクと同じ (それゆえ両者の Cartan 部分代数が同じものになる) ならば，その正則部分代数は**極大**と呼ばれる．

ある Dynkin 図形から一つの白丸を削除すれば，残りは一つの図形か，二つの分離した図形である．これらは，元の単純ルートの部分集合に付随した，元の代数の正則部分代数 (に対応する図形) である．それゆえ例えば，$SU(n+m)$ の $SU(n)\times SU(m)$ 部分代数はそのようにして得られる．この手続きをくり返せば他の正則部分代数を見つけることが出来る．しかしながら，これらの部分代数は出発点の群よりも低いランクを持つ．削除された Cartan 生成子は，部分代数の $U(1)$ 因子を生成する．白丸を削除することによっては得られないような，しかし我々が分類定理を確立するときに使った融合の手続きを使えば得ることができる，極大ではない正則部分代数も存在する．

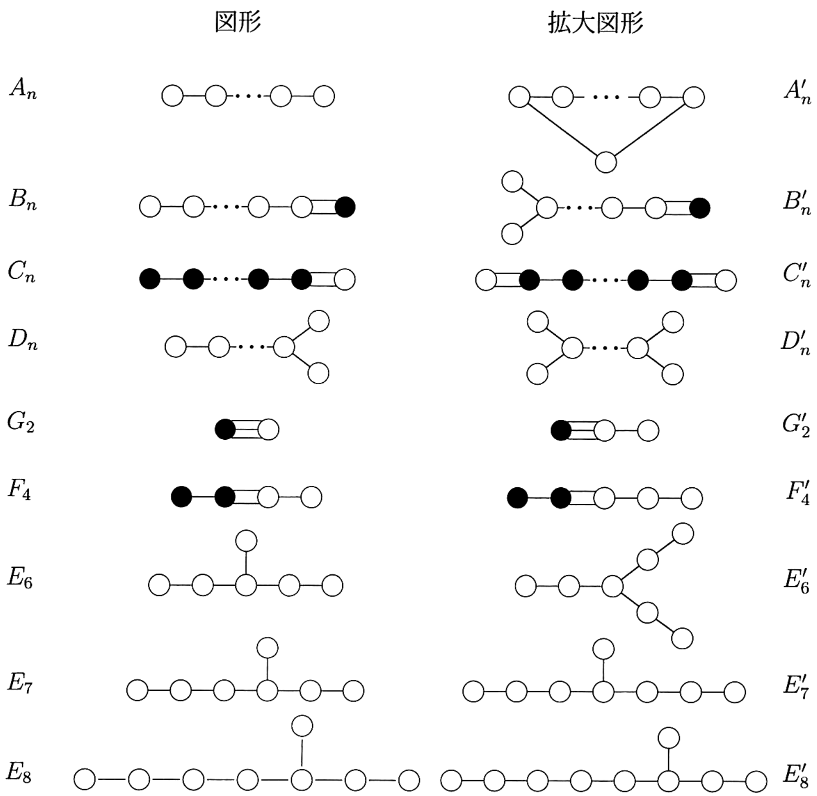
半単純な極大正則部分代数を見つけるため，次のトリックを使うことが出来る．単純ルートの系 α^j $(j=1,\cdots,n)$ に，最低のルート α^0 を加える．α^0 は最低ルートなので，$\alpha^0-\alpha^j$ はルートでなく，したがって，いつもの議論により

$$\frac{2\alpha^0\cdot\alpha^j}{{\alpha^0}^2} \quad \text{および} \quad \frac{2\alpha^0\cdot\alpha^j}{{\alpha^j}^2} \tag{20.19}$$

は非正の整数である．それゆえ，この $n{+}1$ 個のベクトルの系は，ベクトルの間に一つの線形関係があるという点を除き，Π-系の条件を満たしている．これは拡大 Π-系 あるいは拡大 Dynkin 図形と呼ばれる．

拡大Π-系から任意のベクトルを一つ取り除けば，残りのベクトルは線形独立である．それらは依然としてマスター公式を満たしている．それゆえ，それらは元の代数の正則な極大部分代数の単純ルートである．しかしながら，系は分離不可能ではないかも知れないので，部分代数は一般に半単純である．

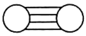
Π-系のそれぞれに，一意的な拡大Π-系がある．何故なら，Dynkin 図形が与えられたとき，最低ルートはあからさまに求めることが出来るからである．実は我々は分類定理の議論において既にすべての拡大Π-系について議論しているのである．というのは，それらは線形独立性のテストには通らなかったが，それ以外では OK だったからである．拡大 Dynkin 図形を以下に示そう:



(20.20)

小さな n に対しては，いくつか例外がある．$A_1 = B_1 = C_1 = SU(2)$ と $D_2 =$

$SU(2) \times SU(2)$ は，記法を変えないと拡大できない．$SU(2)$ の最高および最低ルートはお互いのマイナスであるが，Dynkin 図形の我々の定義には 180° に対する記法を含めなかったからである．それはたぶん次のように書くべきだろう：



(20.21)

他の例外は B_2 と D_3 である．これらに対しては，上で示されている拡大図形は，枝分かれを書くのに十分な数の白丸が無いので，存在しない．対応する拡大 Π-系は，実際は C_2' と A_3' である．

いくつか他の例をやってみよう．

最初に注意すべきことは，A_n が半単純な正則極大部分代数を持たないことである．A_n' からどの白丸を取り除いても，単に A_n に戻るだけである．

B_n に対しては，B_n' の左端から一つ白丸を消せば，再び B_n に戻る．しかし，B_n' の右端から黒丸を取り除けば D_n が得られる．これは $SO(2n+1)$ が $SO(2n)$ 部分群を持つことに対応している．B_n' の真ん中 (があるほど大きな n の場合) から白丸を一つ取り除けば，図形は D_k と B_{n-k} に分離するが，そｘれらは $SO(2k) \times SO(2n-2k+1)$ 部分群に対応する．これらのそれぞれは，さらに分解することも出来る．一般に，全ての半単純な正則極大部分代数を数え上げるには，もはやそれ以上分解出来ない部分代数に到達するまで部分代数への分解を続けなければならない．

C_n に対しては，C_n' のどちらの端の白丸を取り除いても C_n に戻る．真ん中から黒丸を取り除くと，C_n を C_k と C_{n-k} に分解する．最後に，最初か最後の黒丸を取り除くと，$A_1 \times C_{n-1}$ が得られる．これは実は，$A_1 = SU(2)$ は $C_1 = Sp(2)$ と同じ代数だから，再び同じことである．それゆえこれは，同じ解析の縮退した特殊ケースに過ぎない．

D_n に対して，D_n' のどちらの端の白丸を消しても D_n に戻るので，白丸は真ん中からしか取り除けない．その時，$SO(2k) \times SO(2n-2k)$ に対応する $D_k \times D_{n-k}$ が得られる．

G_2 は十分に小さいので，容易に全ての可能性を数え上げることが出来る．G_2' の右から白丸を取り除けば G_2 に戻る．左から黒丸を取り除けば，$A_2 = SU(3)$ が得られる．真ん中の丸を取り除けば，$SU(2) \times SU(2)$ を得る．

F_4 は B_4 部分群を持つ．それは左端の黒丸を消せば得られる．二番目の黒丸を

取り除けば，$A_1 \times A_3$ 部分群が得られる．一番左の白丸を取り除けば，$A_2 \times A_2$ 部分群を得る．最後から二番目の白丸を取り除けば，$C_3 \times A_1$ 部分群が得られる．

これくらいで止めにして，いくつかの問いを問題の組と試験に残しておこう．

20.3　他の部分代数

ある代数の部分代数という一般的テーマは，極めて複雑な問題である．しかし原理は簡単である．各代数に対し，他の全ての表現がそれから構成できるような最も簡単な表現がある．この表現がある部分代数の下でどう変換するかを知っていれば，任意の表現がどう変換するのか分かる．逆に，その最も簡単な表現の可能な変換の各々は，異なる部分代数に付随している．

我々は以下の章で何度もこの概念に立ち戻るだろう．

問題

20.A.　分解可能な Π-系は分解可能なルート系を与えることを証明せよ．

20.B.　E_6 の正則極大部分代数をすべて見つけよ．

20.C.　$SO(12)$ の正則極大部分代数を見出せ．それらすべてを見つけるために拡大 Dynkin 図形のアルゴリズムをくり返し使わねばならないだろう．なぜなら，正則極大部分代数のあるものは，それ自身が自明でない正則極大部分代数を持つからである．

第21章

$SO(2n+1)$ とスピノール

$SO(N)$ 代数は，探究に値する魅力的な性質 —— スピノール表現 (spinor representation) を持っている．

21.1 $SO(2n+1)$ の基本ウェイト

$SO(2n+1)$ の生成子を次のようにラベルしよう:

$$M_{ab} = -M_{ba} \ \ (a, b = 1, \cdots, 2n+1) \tag{21.1}$$

$2n+1$ 次元の定義表現において

$$[M_{ab}]_{xy} = -i \left(\delta_{ax}\, \delta_{by} - \delta_{bx}\, \delta_{ay} \right) \tag{21.2}$$

これより交換関係は容易に計算できて，

$$\begin{aligned} &[M_{ab},\, M_{cd}] \\ &= -i \left(\delta_{bc}\, M_{ad} - \delta_{ac}\, M_{bd} - \delta_{bd}\, M_{ac} + \delta_{ad}\, M_{bc} \right) \end{aligned} \tag{21.3}$$

これは実ベクトル空間における回転の生成子に対する標準的な形である．Cartan 部分代数の可換な生成子として我々は

$$H_j = M_{2j-1,2j} \ \ (j = 1, \cdots, n) \tag{21.4}$$

をとる．ルートとして

$$\begin{aligned} E_{\eta e^j} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(M_{2j-1,2n+1} + i\,\eta\, M_{2j,2n+1}) \\ E_{\eta e^j + \eta' e^k} &= \frac{1}{2}(M_{2j-1,2k-1} + i\,\eta\, M_{2j,2k-1} \\ &\qquad + i\,\eta'\, M_{2j-1,2k} - \eta\,\eta'\, M_{2j,2k}) \end{aligned} \tag{21.5}$$

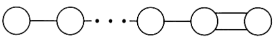
をとることができる．ただし，$\eta, \eta' = \pm 1$．これらは

$$\left[H_j,\, E_{\eta e^k}\right] = \eta\, [e^k]_j\, E_{\eta e^k} = \eta\, \delta_{jk}\, E_{\eta e^k} \tag{21.6}$$

を満たすので，単純ルートは

$$\begin{aligned} &\alpha^j = e^j - e^{j+1} \quad (\, j = 1, \cdots, n-1) \\ &\alpha^n = e^n \end{aligned} \tag{21.7}$$

で与えられ，次の図形に対応する:



$\alpha^1 \quad \alpha^2 \cdots \qquad \alpha^{n-1} \quad \alpha^n$ (21.8)

基本ウェイトは

$$\begin{aligned} &\mu^j = \sum_{k=1}^{j} e^k \quad (\, j = 1, \cdots, n-1) \\ &\mu^n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} e^k \end{aligned} \tag{21.9}$$

である．最後のものは，α^n の規格化が異なっているために，異なっている．この最後の表現が**スピノール** (spinor) である．ルート e^j に関する Weyl 鏡映により，μ^n からウェイトの組

$$\frac{1}{2}(\pm e^1 \pm e^2 \cdots \pm e^n) \tag{21.10}$$

が得られる．これらは，Weyl 鏡映により最高ウェイト状態と等価であるため，すべて一意的である．しかも，それぞれが正値性の他の定義では最高ウェイトになり得たものであり，したがって，他にはウェイトが存在せず，表現は 2^n 次元である．この 2^n 次元空間を n 個の 2 次元空間のテンソル積として扱うのが便利である．そうすればその空間の中の任意の行列はパウリ行列のテンソル積として構成することができる．j 番目の空間のパウリ行列を σ_a^j と呼ぼう．すなわち，

$$\begin{aligned} &|\pm e^1/2 \pm e^2/2 \cdots \pm e^n/2\rangle \\ &\quad \equiv |\pm e^1/2\rangle \otimes |\pm e^2/2\rangle \otimes \cdots \otimes |\pm e^n/2\rangle \\ &\sigma_a^j\, |x\, e^j\rangle = |x'\, e^j\rangle\, [\sigma_a]_{x'x} \end{aligned} \tag{21.11}$$

ただし $x, x' = \pm 1/2$.

この記法では，Cartan 生成子は

$$H_j = \frac{1}{2}\sigma_3^j \tag{21.12}$$

となる．これらは

$$H_j^2 = \frac{1}{4} \tag{21.13}$$

を満たす．我々はどの M_{ab} も Cartan 生成子として選ぶことが出来たはずで，それゆえ，この表現において任意の $a \neq b$ に対し

$$M_{ab}{}^2 = \frac{1}{4} \tag{21.14}$$

となることは明らかである．ここでルート

$$E_{e^j} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(M_{2j-1,2n+1} + iM_{2j,2n+1}\Big) \tag{21.15}$$

を考える．この表現中の状態はたかだか一回しか (固有値を) 上げられないので

$$(E_{e^j})^2 = 0 \tag{21.16}$$

が成り立たねばならない．$(E_{e^j})^2$ を展開すれば，これが

$$\{M_{2j-1,2n+1},\, M_{2j,2n+1}\} = 0 \tag{21.17}$$

を意味していることがわかる．再び，軸の特定の選び方は任意なので，

$$\{M_{j\ell},\, M_{k\ell}\} = 0 \quad \text{for} \quad j \neq k \neq \ell \neq j \tag{21.18}$$

が成り立たねばならない．

これから E 生成子達を構成しよう．E_{e^1} は昇演算子なので，明らかに

$$\begin{aligned} &E_{e^1}|-e^1/2 + x_2e^2 + \cdots x_ne^n\rangle \\ &\quad = f(x_2, \cdots, x_n)\,|e^1/2 + x_2e^2 + \cdots x_ne^n\rangle \\ &E_{-e^1}|-e^1/2 + x_2e^2 + \cdots x_ne^n\rangle = 0 \end{aligned} \tag{21.19}$$

ただし f はある関数．f のノルムは，通常のトリックを用いて計算できる．

$$\begin{aligned} &|f(x_2, \cdots, x_n)|^2 = \langle -e^1/2 + x_2e^2 + \cdots x_ne^n| \\ &E_{-e^1}E_{e^1}|-e^1/2 + x_2e^2 + \cdots x_ne^n\rangle \\ &\quad = \langle -e^1/2 + \cdots|\,\{E_{-e^1},\, E_{e^1}\}\,|-e^1/2 + \cdots\rangle \end{aligned} \tag{21.20}$$

ところが (21.14) と (21.17) を使えば

$$\{E_{-e^1},\, E_{e^1}\} = \frac{1}{2} \tag{21.21}$$

がわかる[1]ので

$$|f(x_2,\cdots,x_n)|^2 = \frac{1}{2} \tag{21.22}$$

各 $x_2,\cdots,x_n$ に対し，状態の相対位相を選んで f を正に出来る．これは $x_1 = -1/2$ を持つ状態の位相を調節することで出来る．そうすると x に依らず

$$f(x_2,\cdots,x_n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{21.23}$$

我々の σ_a^1 の定義と比較して，次式を得る:

$$E_{\pm e^1} = \frac{1}{2}\sigma_\pm^1 \tag{21.24}$$

同じ議論を $E_{\pm e^2}$ に適用しよう．ある関数 f_2 を用いて

$$\begin{aligned} &E_{e^2}|x_1e^1 - e^2/2 + \cdots x_ne^n\rangle \\ &= f_2(x_1,x_3,\cdots,x_n)\,|x_1e^1 + e^2/2 + \cdots x_ne^n\rangle \\ &\text{ただし}\quad |f_2(x_1,x_3,\cdots,x_n)|^2 = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{21.25}$$

$x_1 = 1/2$ に対し，前と同様，状態の相対位相を $f_2 = 1/\sqrt{2}$ となるよう選べるから，

$$E_{e^2}|e^1/2 - e^2/2 + \cdots\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|e^1/2 + e^2/2 + \cdots\rangle \tag{21.26}$$

ところが，$x_1 = -1/2$ 状態の位相は前の議論ですでに固定したので変更することは出来ない．特に，$\{E_{\pm e^1},\, E_{\pm e^2}\} = 0$ だから，次の計算が出来る．

$$\begin{aligned} &E_{e^2}|-e^1/2 - e^2/2 + \cdots\rangle \\ &= \sqrt{2}\,E_{e^2}\,E_{-e^1}|e^1/2 - e^2/2 + \cdots\rangle \\ &= -\sqrt{2}\,E_{-e^1}\,E_{e^2}|e^1/2 - e^2/2 + \cdots\rangle \\ &= -E_{-e^1}|e^1/2 + e^2/2 + \cdots\rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}|-e^1/2 + e^2/2 + \cdots\rangle \end{aligned} \tag{21.27}$$

[1] $[E_{\alpha^1},\, E_{-\alpha^1}] = \vec{\alpha}^1 \cdot \vec{H}$ なる事実を使っても同じく良い．

すなわち $-e^1/2$ 状態に対しては余分な負号が必要である．σ_a^j 行列で書けば

$$E_{\pm e^2} = \frac{1}{2}\,\sigma_3^1\,\sigma_\pm^2 \tag{21.28}$$

ただし，いつものように，テンソル積と了解しておく．

この結果は簡単に理解できる．σ_3^1 は，$E_{\pm e^1}$ と $E_{\pm e^2}$ が反交換することを保証するためにある．$E_{\pm e^1}$ は σ_1^1 と σ_2^1 から成るので，$E_{\pm e^2}$ は σ_3^1 に比例しなければならない．

全く同じように続けて，

$$\begin{aligned} E_{\pm e^3} &= \frac{1}{2}\,\sigma_3^1\,\sigma_3^2\,\sigma_\pm^3 \\ &\cdots \\ E_{\pm e^j} &= \frac{1}{2}\,\sigma_3^1\,\cdots\,\sigma_3^{j-1}\,\sigma_\pm^j \end{aligned} \tag{21.29}$$

を得る．エルミート生成子に対しては

$$\begin{aligned} M_{2j-1,2n+1} &= \frac{1}{2}\,\sigma_3^1\,\cdots\,\sigma_3^{j-1}\,\sigma_1^j \\ M_{2j,2n+1} &= \frac{1}{2}\,\sigma_3^1\,\cdots\,\sigma_3^{j-1}\,\sigma_2^j \end{aligned} \tag{21.30}$$

と書くことが出来る．

他の生成子は，$a, b \neq 2n+1$ に対し，交換関係

$$M_{ab} = -i\,[M_{a,2n+1},\, M_{b,2n+1}] \tag{21.31}$$

を用いて構成できるから，これですべてがわかったことになる．各 M_{ab} は単にパウリ行列の積の $\pm 1/2$ 倍である．

この表現は $SO(2n+1)$ の**スピノール**表現と呼ばれる．それは，見ての通り，$SO(3)$ (または $SU(2)$) のスピン 1/2 表現の一般化になっている．

21.2　実および擬実表現

(21.10) より，スピノール表現 μ^n がその複素共役表現と同値であることがわかる．しかしながら，スピノール表現は複素共役変換の下でおもしろい性質を持っている．これを特定して議論する前に，もっと一般的に問題を扱う．

T_a がある単純リー代数の一つの実既約ユニタリー表現での生成子であるとしよう．そうすると，

$$T_a = -R\,T_a^*\,R^{-1} = -R\,T_a^T\,R^{-1} \tag{21.32}$$

我々は R が自明なスケール因子を除いて一意的であることを証明できる．というのは，他の特異でない行列 Q があって，

$$T_a = -Q\,T_a^*\,Q^{-1} \tag{21.33}$$

を満たすとしよう．そうすれば，

$$T_a^* = -Q^{-1}\,T_a\,Q \tag{21.34}$$

だから，

$$T_a = R\,Q^{-1}\,T_a\,Q\,R^{-1} \tag{21.35}$$

すなわち，すべての a に対し

$$\left[T_a,\, R\,Q^{-1}\right] = 0 \tag{21.36}$$

ところが，ある行列が一つの既約表現のすべての生成子と可換だと，Schur の補題から，それは単位行列に比例することがわかるので，

$$R\,Q^{-1} = \lambda\,I \qquad R = \lambda\,Q \tag{21.37}$$

よって R は本質的に一意的である．

さて，この結果を用いて，R が対称または反対称でなければならないことを示そう．T_a はエルミートであるから，次のように書ける:

$$\begin{aligned}
&T_a = -R\,T_a^T\,R^{-1}\,, \qquad T_a^T = -{R^{-1}}^T\,T_a\,R^T \\
&\Rightarrow T_a = R\,{R^{-1}}^T\,T_a\,R^T\,R^{-1} \\
&\Rightarrow \left[T_a,\, R^T\,R^{-1}\right] = 0
\end{aligned} \tag{21.38}$$

したがって，再び Schur の補題により，$R^T\,R^{-1} = \lambda I$，すなわち or

$$R^T = \lambda\,R \tag{21.39}$$

が結論出来る．ところが，二回転置をとれば元に戻るから $\lambda^2 = 1$，すなわち $\lambda = \pm 1$．これは望みの結果で，

$$R = A = -A^T \qquad \text{あるいは} \qquad R = S = S^T \tag{21.40}$$

したがって，二種類の実表現があり得ることになる．$R = S$ ならば，表現は (real-positive)，あるいは単に **実** (real) と呼ばれる．$R = A$ の時は，表現は**実負** (real-negative)，あるいは **擬実** (pseudo-real) と呼ばれる．

21.3 実表現

実際上この違いの意味する所を理解するため，T_a が純虚反対称行列による表現と同値である場合を考えよう:

$$T'_a = U^{-1}\,T_a\,U\,, \qquad T'_a = -T'^*_a \tag{21.41}$$

対応する群の表現は，

$$e^{i\epsilon_a T'_a} \tag{21.42}$$

の形を持つため，完全に実である．この場合の行列 R を計算できる ——

$$\begin{aligned} &T'_a = -T'^T_a = -U^T\,T_a{}^T\,U^{-1T} = U^{-1}\,T_a\,U \\ &\Rightarrow T_a = -U\,U^T\,T^*_a\,(U\,U^T)^{-1} \end{aligned} \tag{21.43}$$

よって行列 R は対称行列 $U\,U^T$ である．

逆もまた真である．単純リー代数の任意の，対称な R を持つ既約表現は，純虚行列による表現と同値である．これがどのように示されるかを見てみよう．あらゆる既約表現はユニタリー表現と同値だから，生成子はエルミートと仮定する．そのとき R がユニタリー行列に比例することは簡単にわかる．実際，同値条件は

$$-T^T_a = R^{-1}\,T_a\,R = R^\dagger\,T_a\,R^{-1\dagger} \tag{21.44}$$

と書ける．ただし二番目の等号は (T^T_a の) エルミート性から従う．ところが

$$R\,R^\dagger\,T_a = T_a\,R\,R^\dagger \tag{21.45}$$

で，Schur の補題から $R\,R^\dagger \propto I$ である．全体にかかる因子は相似変換において相殺するだけなので，R をユニタリーにとることもできる．ここで R は対称でもあるとしよう．対称なユニタリー行列がユニタリー行列とその転置行列の積として書けるというのは線形代数の事実である:[2]

$$R = V\,V^T \tag{21.46}$$

ところが，そのとき生成子

$$T_a' = V^{-1}\,T_a\,V \tag{21.47}$$

は反対称である —— 例えば，実条件 (21.44) に，左から V^T を，右から V^{-1T} を掛ければ次式が得られる．

$$-V^T\,T_a^T\,V^{-1T} = V^{-1}\,T_a\,V \tag{21.48}$$

21.4 擬実表現

対照的に，擬実表現は，その複素共役表現と同値であるに拘わらず，純虚行列には変換できない．擬実表現の最も簡単な例は，パウリ行列 $T_a = \sigma_a/2$ により生成される $SU(2)$ のスピン 1/2 表現である．明らかに，この表現を反対称な虚数の 2×2 行列では作り得ない．そのような行列は一つしかないのに，生成子は三つ存在するからである．しかしそれでもこの表現はその複素共役と同値である:

$$\sigma_a = -\sigma_2\,\sigma_a^*\,\sigma_2 \tag{21.49}$$

だからである．そして確かに変換行列 σ_2 は反対称であり，よって表現は擬実である．

21.5 R は不変テンソル

行列 R に対してもう一つの有用な考え方がある．それは不変テンソルということである．これを見るには，いつも仮定しているように表現がユニタリーな

[2] もし R が対称でユニタリーなら，$R\,R^* = R^*R = I$ であるから，R の実部と虚部は可換である．よってそれらはある直交変換で同時対角化可能である．読者は，そこから議論を続けることが出来るはずだ．

ら，(21.32) は

$$T_a R = -R T_a^* \Rightarrow T_a R + R T_a^T = 0\,. \tag{21.50}$$

と書き直せる．添字をあらわにして書けば，

$$[T_a]^x_z R^{zy} + [T_a]^y_z R^{xz} = 0 \tag{21.51}$$

となるが，これは R がテンソル積空間 $D \otimes D$ における不変テンソルであることを意味している．ただし D は T_a により生成される表現である．任意の実表現に対し，$D \otimes D$ は自明な表現 1 を一回だけ含む．R は一意的だからである．もし D が実正ならば，$D \otimes D$ における表現 1 の係数は，まさに不変テンソル R であるが，二つの同値な D の交換に関して対称である．もし D が実負 (擬実) ならば，その係数 R は反対称である．

21.6 R のあらわな形

$SO(2n+1)$ のスピノール表現に対して行列 R を見つけるには，任意の j を持つ生成子

$$\begin{aligned} M_{2j-1,2n+1} &= \frac{1}{2}\,\sigma_3^1 \cdots \sigma_3^{j-1}\,\sigma_1^j \\ M_{2j,2n+1} &= \frac{1}{2}\,\sigma_3^1 \cdots \sigma_3^{j-1}\,\sigma_2^j \end{aligned} \tag{21.52}$$

に対して (21.32) を満たせば十分である．なぜなら，他の生成子は皆これらの交換関係で得られ，(21.52) の生成子に対し (21.32) が満たされれば，それらの交換子に対しても満たされるからである．今や R は種々な部分空間における 2×2 行列のテンソル積として構成できる:

$$R \equiv \prod_j r^j \tag{21.53}$$

我々は

$$\begin{aligned} -r^1\,{\sigma_{1,2}^1}^*\,{r^1}^{-1} &= \sigma_{1,2}^1 \\ -r^1\,\sigma_3^{1*}\,{r^1}^{-1} \cdot r^2\,{\sigma_{1,2}^2}^*\,{r^2}^{-1} &= \sigma_3^1\,\sigma_{1,2}^2 \\ -\left(\prod_{k=1}^{j-1} r^k\,\sigma_3^{k*}\,{r^k}^{-1}\right) \cdot r^j\,{\sigma_{1,2}^j}^*\,{r^j}^{-1} &= \left(\prod_{k=1}^{j-1} \sigma_3^k\right)\,\sigma_{1,2}^j \end{aligned} \tag{21.54}$$

を満たさねばならない．我々は r^j を一つずつ決めて行ける．r^1 は σ_1^1 と反交換し，σ_2^1 と交換しなければならない．よって $r^1=\sigma_2^1$ ととれる．そうすると，次の条件から r^2 は σ_1^2 と交換し，σ_2^2 と反交換しなければならない．よって $r^2=\sigma_1^2$ ととれる．等々 —— σ_2 と σ_1 が交互に現れる．

よって行列 R は

$$R=\prod_{j:\text{奇}}\sigma_2^j\prod_{k:\text{偶}}\sigma_1^k \tag{21.55}$$

ととることができる．次式に注意しよう:

$$R^2=1\,,\quad \text{すなわち}\quad R=R^{-1}\qquad \text{そして}\qquad R^T=(-1)^{n(n+1)/2}R \tag{21.56}$$

したがって $n=1$，2 に対して R は反対称，$n=3$，4 に対して R は対称; $n=5$，6 に対して R は反対称; 等々．よって

代数	スピノール
$SO(8k+3)$	擬実
$SO(8k+5)$	擬実
$SO(8k+7)$	実
$SO(8k+1)$	実

(21.57)

問題

21.A.　10 個の行列 $\frac{1}{2}\vec{\sigma}$，$\frac{1}{2}\vec{\sigma}\tau_1$，$\frac{1}{2}\vec{\sigma}\tau_3$，$\frac{1}{2}\tau_2$ の組が $SO(5)$ のスピノール表現を与えることを示せ．この表現に対し $T_a=-R\,T_a^*\,R$ となる行列 $R=R^{-1}$ を見つけよ．

21.B.　$SO(2n+1)$ の部分代数 $SO(2n-1)$ を任意に便利なように同定し，$SO(2n+1)$ のスピノール表現がその部分代数の下でどのように変換するのかを決定せよ．

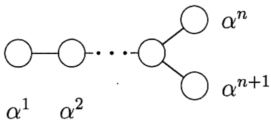
第22章

$SO(2n+2)$ スピノール

$SO(2n+2)$ のスピノール表現を作るのには $SO(2n+1)$ の結果を利用することが出来る．我々は前章の議論と同じ記法を使う．

22.1 $SO(2n+2)$ の基本ウェイト

$SO(2n+2)$ の Dynkin 図形は



(22.1)

で与えられ，単純ルート α^j は

$$\alpha^j = e^j - e^{j+1} \ (j = 1, \cdots, n) , \quad \alpha^{n+1} = e^n + e^{n+1} \tag{22.2}$$

である．すべてのルートは次の形を持つ:

$$\pm e^j \pm e^k , \quad j \neq k \tag{22.3}$$

我々は，最後の二つの基本ウェイト

$$\begin{aligned} \mu^n &= \frac{1}{2}\Big(e^1 + \cdots + e^n - e^{n+1}\Big) \\ \mu^{n+1} &= \frac{1}{2}\Big(e^1 + \cdots + e^n + e^{n+1}\Big) \end{aligned} \tag{22.4}$$

に対応する二つの特別な表現に興味がある．対応する表現を D^n，D^{n+1} と呼ぼう．D^n のウェイトは

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \eta_j \, e^j \tag{22.5}$$

の形をしている．ただし η_j は

$$\eta_j = \pm 1 \qquad \text{かつ} \qquad \prod_{j=1}^{n+1} \eta_j = -1 \tag{22.6}$$

これは，ルートは常に二つの η の符号を変えるからである．D^{n+1} のウェイトは同じ形だが

$$\prod_{j=1}^{n+1} \eta_j = 1 \tag{22.7}$$

を満たすものである．

ウェイトがわかったので，これらの表現の実・複素性を議論できる．n が奇数，すなわち代数が整数 m で $SO(4m)$ の形の場合，偶数個の η がある．$-\mu^n$ は，まだ $\prod_{j=1}^{n+1} \eta_j = -1$ を満たすから，D^n のウェイトである．明らかにそれは D^n の最低ウェイトである．同様に，$-\mu^{n+1}$ は D^{n+1} の最低ウェイトである．よって，奇数の n に対し，$SO(2n+2)$ のスピノール表現は実 (あるいは擬実) である．

しかし n が偶数のときは，$-\mu^n$ は，$\prod_{j=1}^{n+1} \eta_j = 1$ を満たすから D^{n+1} の最低のウェイトとなる．同様に $-\mu^{n+1}$ は D^n の最低のウェイトとなる．それゆえ，偶数の n に対してスピノール表現は複素であり，$\overline{D}^n$ は D^{n+1} であり，$\overline{D}^{n+1}$ は D^n である．

これらの表現を詳しく構成するため，$SO(2n+2)$ 中の

$$M_{jk} \quad (j, k \leq 2n+1) \tag{22.8}$$

により生成される $SO(2n+1)$ 部分群を考えよう．これにより Cartan 生成子

$$H_{n+1} = M_{2n+1, 2n+2} \tag{22.9}$$

は消される．ウェイト

$$\pm e^j \pm e^{n+1} \quad (j \leq n) \tag{22.10}$$

を持つ $4n$ 個の生成子は，

$$M_{j, 2n+1} \quad \text{および} \quad M_{j, 2n+2} \quad (j \leq 2n) \tag{22.11}$$

の線形結合で与えられていたものだが，ウェイト

$$\pm e^j \quad (j \leq n) \tag{22.12}$$

を持つ $2n$ 個の生成子 $M_{j,2n+1}$ につぶれる．この $SO(2n+1)$ 部分群の下で，D^n と D^{n+1} は両者とも前章で我々の分析したスピノール表現として変換する．実際 H_{n+1} はこの部分群の生成子ではないので，単にすべてのウェイトベクトルの第 $n+1$ 成分を無視すれば，前章の分析を変更なしに持ってくることができる．これをやれば，ウェイトベクトルは D^n と D^{n+1} の両者に対して同じものである:

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\eta_j\,e^j \quad (\eta_j=\pm 1) \tag{22.13}$$

テンソル積の記法で，$\eta_j=\sigma_3^j$ であり，生成子は次のように与えられる:

$$\begin{aligned} M_{2j-1,2n+1} &= \frac{1}{2}\,\sigma_3^1\,\cdots\,\sigma_3^{j-1}\,\sigma_1^j \\ M_{2j,2n+1} &= \frac{1}{2}\,\sigma_3^1\,\cdots\,\sigma_3^{j-1}\,\sigma_2^j \end{aligned} \tag{22.14}$$

ここで全体の $SO(2n+2)$ 代数に戻り，表現 D^n において

$$\eta_{n+1} = -\prod_{j=1}^{n}\eta_j = -\sigma_3^1\cdots\sigma_3^n \tag{22.15}$$

に注意する．したがって，

$$H_{n+1} = M_{2n+1,2n+2} = -\frac{1}{2}\,\sigma_3^1\cdots\sigma_3^n \tag{22.16}$$

今やすべての生成子は交換関係により見つけることができる．

表現 D^{n+1} においては

$$\eta_{n+1} = \prod_{j=1}^{n}\eta_j = \sigma_3^1\cdots\sigma_3^n \tag{22.17}$$

であり，

$$H_{n+1} = M_{2n+1,2n+2} = \frac{1}{2}\,\sigma_3^1\cdots\sigma_3^n \tag{22.18}$$

今や我々は表現をあらわに構成したので，先に議論した実・複素性をもっと詳しく調べることができる．$SO(2n+1)$ の時と同じように，行列

$$R = R^{-1} = \prod_{j:\text{奇}}\sigma_2^j\,\prod_{k:\text{偶}}\sigma_1^k \tag{22.19}$$

を定義し，D^n と D^{n+1} 表現に対して複素共役表現

$$-R\,T_a^*\,R^{-1} \tag{22.20}$$

を調べる．我々は既に $SO(2n+1)$ 部分群，$j,k \le 2n+1$，に対し

$$-R\,M_{jk}^*\,R^{-1} = M_{jk} \tag{22.21}$$

を知っている．それゆえ複素共役の下で $M_{2n+1,2n+2}$ がどうなるかを見れば十分である．奇数の n に対して，

$$-R\,M_{2n+1,2n+2}^*\,R^{-1} = M_{2n+1,2n+2} \tag{22.22}$$

であり，それゆえ交換関係を使えばすべての生成子に対し同値性を確立できる．したがって，すでに知っているように，これらの表現は実である．ところが今は R を知っているので，それが実正なのか擬実なのかを決めることが出来る．$n=4k+1$ に対して，R は反対称であるから D^n と D^{n+1} は擬実となる．$n=4k+3$ に対して，R は対称であり，D^n と D^{n+1} は実となる．

偶数の n に対しては，

$$-R\,M_{2n+1,2n+2}^*\,R^{-1} = -M_{2n+1,2n+2} \tag{22.23}$$

となり，表現 D^n と D^{n+1} は入れ替わり，よってそれらは複素である．

$SO(N)$ スピノールの実・複素性についての話のすべては次のようにまとめられる:

代数	スピノール
$SO(8k+3)$	擬実
$SO(8k+4)$	擬実
$SO(8k+5)$	擬実
$SO(8k+6)$	複素
$SO(8k+7)$	実
$SO(8k)$	実
$SO(8k+1)$	実
$SO(8k+2)$	複素

(22.24)

問題

22.A.　$SO(2n)$ が一つの正則極大部分代数として $SO(2m)\times SO(2n-2m)$ を含むことを示せ．また $SO(2n)$ のスピノール表現はこの部分群の下でどのように変換するか?

22.B. $SO(2n+1)$ が一つの正則極大部分代数として $SO(2m) \times SO(2n-2m+1)$ を含むことを示せ．また $SO(2n+1)$ のスピノール表現はこの部分群の下でどのように変換するか?

22.C. $SO(4)$ が $SU(2) \times SU(2)$ と同じ代数を持つことを示せ．それゆえそれは単純ではない．にもかかわらず，この章の議論は適用できる．どのように適用できるのか説明せよ．

22.D. $SO(6)$ 代数と $SU(4)$ 代数が同値であり，$SU(4)$ の 4 表現が $SO(6)$ のスピノール表現となっていることを示せ．$SU(4)$ では $4 \otimes 4 = 6 \oplus 10$ であった．この 6 は $SO(6)$ のベクトル表現である．この 10 は $SO(6)$ の言葉で言えばどういう表現か?

第23章

$SU(n) \subset SO(2n)$

$SU(n)$ の $SO(2n)$ への埋め込みを効率的に議論するため，スピノール表現について語る別の言葉 —— Clifford 代数を導入しよう．

23.1 Clifford 代数

Clifford 代数とは，反交換関係

$$\{\Gamma_j,\, \Gamma_k\} = 2\,\delta_{jk}\,, \qquad (\, j, k = 1,\, \cdots, N) \tag{23.1}$$

を満たす演算子の組である．そのような一組の演算子が与えられたとすると，すぐさま $SO(N)$ の一つの表現が次のように構成できる:

$$M_{jk} = \frac{1}{4i}\,[\Gamma_j,\, \Gamma_k] \tag{23.2}$$

Jacobi 恒等式を用いて，この M_{jk} が $SO(N)$ の交換関係を満たすこと，さらに Γ たちが，$SO(N)$ の N 次元表現として変換するテンソル演算子の組であって，

$$[M_{jk},\, \Gamma_\ell] = i\left(\delta_{j\ell}\,\Gamma_k - \delta_{k\ell}\,\Gamma_j\right) = \Gamma_m\,[M^{D^1}_{jk}]_{m\ell} \tag{23.3}$$

を満たすこと，は容易に確かめられる．ただし，

$$[M^{D^1}_{jk}]_{\ell m} = -i\Big(\delta_{j\ell}\,\delta_{km} - \delta_{jm}\,\delta_{k\ell}\Big) \tag{23.4}$$

は，μ^1 を最高ウェイトとするベクトル表現 D^1 での生成子である．

$SO(2n+1)$ に対して，我々が前に構成したスピノール表現を与えるような

Clifford 代数を見つけることは簡単なことである．それは

$$
\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \sigma_2^1\sigma_3^2\cdots\sigma_3^n & \Gamma_2 &= -\sigma_1^1\sigma_3^2\cdots\sigma_3^n \\
\Gamma_3 &= \sigma_2^2\cdots\sigma_3^n & \Gamma_4 &= -\sigma_1^2\cdots\sigma_3^n \\
& & \cdots & \\
\Gamma_{2n-1} &= \sigma_2^n & \Gamma_{2n} &= -\sigma_1^n \\
& \Gamma_{2n+1} = \sigma_3^1\sigma_3^2\cdots\sigma_3^n
\end{aligned}
\tag{23.5}
$$

である．ここで積

$$\Gamma_1\Gamma_2\cdots\Gamma_{2n+1} = i^n \tag{23.6}$$

が単位行列に比例することに注意しておこう．

これは $SO(2n+2)$ と関連がある．それを生成するのに十分な Clifford 代数の元は無いのだけれど．これらの Clifford 代数の元は実際我々の構成したスピノール表現の $M_{j,2n+2}$ に比例している．これらの生成子は $SO(2n+2)$ の $SO(2n+1)$ 部分代数の下でのベクトルの成分として変換する．

この Clifford 代数から $SO(2n+2)$ 代数の表現を作ることはできない (少なくとも，十分な Γ がないので，(23.2) を用いて生成子を作ることはできない) が，単に Γ_{2n+1} を除外して $SO(2n)$ 代数を作ることはできる．しかし出来た表現は可約である．すべての生成子と交換する自明でない行列—— すなわち Γ_{2n+1} 自身 —— があるからである．

$$\Gamma_{2n+1} = (-i)^n\,\Gamma_1\Gamma_2\cdots\Gamma_{2n} = \prod_{j=1}^{n}\sigma_3^j \tag{23.7}$$

我々はこれを使って，既約表現 D^{n-1} および D^n として変換する二つの不変部分空間への射影演算子を作ることができる．

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(1-\Gamma_{2n+1}\right) \ : \ D^{n-1}\ \text{へ射影} \\
&\frac{1}{2}\left(1+\Gamma_{2n+1}\right) \ : \ D^{n}\ \text{へ射影}
\end{aligned}
\tag{23.8}
$$

これは $\prod_{j=1}^{n}\sigma_3^j$ が，最初の部分空間では -1，二番目では $+1$ だからである．

23.2 不変テンソルとしてのΓ_mとR

Clifford 代数による構成が有用である主な理由は，Γ 行列が一組の不変テンソルである ((23.3) を見よ) ことである．そのため，我々はスピノールの積を Clebsch-Gordan 分解する過程で有用に使うことができる．$SO(2n+1)$ に戻り，交換関係 (23.3) を成分で書こう ──そうすれば，

$$\begin{gathered}[M_{jk}]_{xz}\,[\Gamma_\ell]_{zy} - [M^*_{jk}]_{yz}\,[\Gamma_\ell]_{xz} \\ +[M^{D^1}_{jk}]_{\ell m}\,[\Gamma_m]_{xy} = 0\end{gathered} \tag{23.9}$$

となる．それゆえ $[\Gamma_\ell]_{xy}$ は不変テンソルであり，その x 添字はスピノール表現 D^n として，y 添字は共役表現 $\overline{D}^n$ として，ℓ 添字はベクトル表現 D^1 として，それぞれ変換する．もちろん我々は，$SO(2n+1)$ において，表現 $\overline{D}^n$ が行列 R による相似変換で D^n と同値であることは知っている．しかし，Γ に対するこの形においては，我々は相似変換をやらなかった．あらわに現れているのは $\overline{D}^n$ 行列である．変換の中にあらわに入れることもできた．

$$-M^*_{jk} = -M^T_{jk} = R^{-1}\,M_{jk}\,R \tag{23.10}$$

を使ってこれをやると仮定しよう．上付き添字，下付き添字の言葉でこれを書くことが有用である．D^n の生成子の行列要素が (例えば)

$$[M_{jk}]^x_y \tag{23.11}$$

のように，x が行 (行列の前の添字) を y が列 (後ろの添字) を参照するとすれば，R は二つの上付き添字を持つ不変テンソルとして振る舞う．我々は第 21 章でこのことを示したが，もう一度それをやろう．左側から R を掛けて，添字を挿入すれば，(23.10) は

$$-R^{xz}\,[M_{jk}]^y_z = [M_{jk}]^x_z\,R^{zy} \tag{23.12}$$

あるいはもっときれいな形

$$[M_{jk}]^x_z\,R^{zy} + [M_{jk}]^y_z\,R^{xz} = 0 \tag{23.13}$$

になる．(23.13) は R^{xy} が不変テンソルであると言っている．

Clifford 代数の元は，M_{jk} と同じく，上付き，下付き添字を一つずつ持つ:

$$[\Gamma_j]^x_y \tag{23.14}$$

これらは明確な対称性を持っていない (もっと正確に言えば，Γ_j は j の異なる値ごとに違った対称性を持ち，しかもその性質は基底に依存している)．なぜなら上付き添字と下付き添字は異なる種類の対象なので，それらを入れ替えることとは意味をなさないからである．しかし，R を掛けることによって下付き添字を上げることができる:

$$[\Gamma_j\, R]^{xy} = [\Gamma_j]^x_z\, R^{zy} \tag{23.15}$$

この対象は，明確な対称性を持つことができ，実際に持つ．

さて M_{jk} の Γ_ℓ との交換関係を上付き，下付き添字を使って書き直そう．

$$\begin{aligned} &[M_{jk}]^x_z\, [\Gamma_\ell]^z_y + [R^{-1}\, M_{jk}\, R]^y_z\, [\Gamma_\ell]^x_z \\ &+[M^{D^1}_{jk}]_{\ell m}\, [\Gamma_m]^x_y = 0 \end{aligned} \tag{23.16}$$

これに R^{yw} を掛けて y について足し上げて書き直すと，

$$\begin{aligned} &[M_{jk}]^x_z\, [\Gamma_\ell\, R]^{zw} + [R^T\, R^{-1}\, M_{jk}\, R]^w_z\, [\Gamma_\ell]^{xz} \\ &+[M^{D^1}_{jk}]_{\ell m}\, [\Gamma_m\, R]^{xw} \\ &= [M_{jk}]^x_z\, [\Gamma_\ell\, R]^{zw} + [R^T\, R^{-1}\, M_{jk}]^w_z\, [\Gamma_\ell\, R^T]^{xz} \\ &+[M^{D^1}_{jk}]_{\ell m}\, [\Gamma_m\, R]^{xw} \\ &= [M_{jk}]^x_z\, [\Gamma_\ell\, R]^{zw} + [M_{jk}]^w_z\, [\Gamma_\ell\, R]^{xz} \\ &+[M^{D^1}_{jk}]_{\ell m}\, [\Gamma_m\, R]^{xw} = 0 \end{aligned} \tag{23.17}$$

最後の等号では，R が対称か反対称だから二つの R^T は二つの R で置き換えて良いということを使った．結局，$D^n \otimes D^n \otimes D^1$ の空間での不変テンソルは積 $\Gamma_\ell\, R$ である．これらの積は，Γ らとは異なり，同一の D^n ラベルの交換の下で対称か反対称でなければならない．これは Dirac 方程式を学んだことがある読者には見覚えがあることだろう．Dirac の γ 行列ではよく似たことが起こっているのである．

$\Gamma_j R$が対称か反対称かを見るため，Γ_jのどれかをチェックすれば良い．一番簡単なのはΓ_{2n+1}で，それは単に全空間でのσ_3達の積であった．Rを掛ければ，結果はRの一種の鏡映のようなもので，iの因子を除いてσ_1やσ_2達が単に入れ替えられたものになる．

$$R^T = \eta_R R \qquad \text{および} \qquad (\Gamma_j R)^T = \eta_{\Gamma R} \Gamma_j R \tag{23.18}$$

を定義すれば，

$$\eta_R \cdot \eta_{\Gamma R} = (-1)^n \tag{23.19}$$

である．なぜなら各2次元部分空間でRか$\Gamma_{2n+1} R$のどちらか一方にσ_1があり，他方にσ_2があるからである．我々は

$$\eta_R = (-1)^{n(n+1)/2} \tag{23.20}$$

を知っているから，次の結果を得る:

$$\eta_{\Gamma R} = (-1)^{n(n-1)/2} \tag{23.21}$$

23.3 Γの積

対称な$\Gamma_j R$よりもΓ_jで押し通す方が良いことがある理由は，Γ_jの行列積もまた不変テンソルを与えることである．これらの積は上付き添字と下付き添字を一つずつ持ち，したがってΓ_jと同じく，空間$D^n \otimes \overline{D}^n$に住み，我々はそれらをClebsch-Gordan分解の過程を完了するのに使うことができる．例えば，交換子$[\Gamma_j, \Gamma_k]$を考えよう．我々はこれが反対称演算子であるM_{jk}に比例することを既に知っている．しかし，このことはJacobi恒等式を用いても結論することができたのである:

$$\begin{aligned} [M_{jk}, [\Gamma_\ell, \Gamma_m]] &= [[M_{jk}, \Gamma_\ell], \Gamma_m] + [\Gamma_\ell, [M_{jk}, \Gamma_m]] \\ &= [\Gamma_{m'}, \Gamma_m] [M_{jk}^{D^1}]_{m'\ell} + [\Gamma_\ell, \Gamma_{m'}] [M_{jk}^{D^1}]_{m'm} \end{aligned} \tag{23.22}$$

これは，$[\Gamma_j, \Gamma_k]$が二つのベクトルの反対称なテンソル積のように変換することを示している．

もっと一般におもしろい組み合わせは多ベクトル添字について反対称な積であり，添字の置換についての和で定義される．$m \leq n$ に対し，

$$\Gamma_{[j_1}\Gamma_{j_2}\cdots\Gamma_{j_m]} \equiv \frac{1}{m!}\sum_{P\begin{pmatrix} k_1\cdots k_m \\ j_1\cdots j_m\end{pmatrix}} \pm\Gamma_{k_1}\Gamma_{k_2}\cdots\Gamma_{k_m} \tag{23.23}$$

を定義する．ただし負号 $-$ は奇置換の場合である．他の組み合わせはおもしろくない．(対称添字に対応する) 二つの Γ の反交換子は Clifford 代数を使えば消せるからである．前と全く同様に Jacobi 恒等式を用いれば，これが m 個のベクトル添字を持つ反対称テンソルとして変換することが示せる．もちろん，実際にはこの複雑な和をとる必要はない．というのは，Clifford 代数は異なる j の値を持つ Γ_j が反交換することを保証しているので，ここで和を取っていることの効果は，どの二つの添字も同じではないことを確かにしているだけだからである．

$m > n$ に対しては，新しい行列は得られない．というのは，$2n+1$ 個すべての Γ_j を掛けると単位行列に比例するので，$n+\kappa$ 個の Γ_j の反対称積は，$n-\kappa+1$ 個の Γ の積に関係しているからである．

積 $\Gamma_{[j_1}\Gamma_{j_2}\cdots\Gamma_{j_m]}$ は，テンソル積 $D^n \otimes \overline{D}^n$ の中に m 階反対称テンソルがどのように現れるのかをあらわに示す．$SO(2n+1)$ において二つのスピノールのテンソル積は，0 階 (自明な表現)，1 階 (ベクトル)，2 階 ($n > 1$ の時随伴表現)，$\cdots$，等々 n 階まで，の反対称テンソルに分解出来る．次元の勘定は，2 項定理のおかげでうまくいっていることがわかる:

$$\begin{aligned} 2^{2n+1} &= (1+1)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} \\ \Rightarrow 2^n \times 2^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k} \end{aligned} \tag{23.24}$$

ここで 2 行目が従うのは

$$\binom{2n+1}{2n+1-k} = \binom{2n+1}{k} \tag{23.25}$$

なので $k = 0$ から n までの和は $n+1$ から $2n+1$ までの和に等しいからである．

もうちょっと風変わりなのは，対称な積と反対称な積への分割である．すべての積は上付き添字と下付き添字を一つずつ持っている．だから何か対称か反対

称なものを得るためには，再び R を掛けなければならない．k 個の異なる Γ_j 行列の積 (それは，異なる添字は反可換なので，反対称積) に R を掛けたものは，

$$\begin{aligned}&\Gamma_{j_1}\Gamma_{j_2}\cdots\Gamma_{j_k}R\\&=(\Gamma_{j_1}R)R^{-1}(\Gamma_{j_2}R)R^{-1}\cdots(\Gamma_{j_k}R)\end{aligned} \tag{23.26}$$

と書け，その転置は

$$\begin{aligned}&(\Gamma_{j_k}R)^T R^{-1^T}\cdots(\Gamma_{j_2}R)^T R^{-1^T}(\Gamma_{j_1}R)^T\\&=\eta_R^{k-1}\eta_{\Gamma R}^k(\Gamma_{j_k}R)R^{-1}\cdots(\Gamma_{j_2}R)R^{-1}(\Gamma_{j_1}R)\\&=\eta_R^{k-1}\eta_{\Gamma R}^k\Gamma_{j_k}\cdots\Gamma_{j_2}\Gamma_{j_1}R\end{aligned} \tag{23.27}$$

ただし，(二つの下付き添字を持つ)R^{-1} が R 自身と同じ対称性を持つ事実を使った．Γ_j 因子を元の順番に戻すためには

$$(k-1)+(k-2)+\cdots+1=k(k-1)/2 \tag{23.28}$$

回だけ互換が必要で，その都度 Clifford 代数のため負号 $-$ が出る．よって結局

$$\begin{aligned}&\Big(\Gamma_{[j_1}\Gamma_{j_2}\cdots\Gamma_{j_k]}R\Big)^T\\&=(-1)^{k(k-1)/2}\eta_R^{k-1}\eta_{\Gamma R}^k\Gamma_{[j_1}\Gamma_{j_2}\cdots\Gamma_{j_k]}R\end{aligned} \tag{23.29}$$

を得る．先頭の符号因子はもう少し優雅に書けて次のようになる:

$$\begin{aligned}&(-1)^{k(k-1)/2}\eta_R^{k-1}\eta_{\Gamma R}^k\\&=(-1)^{k(k-1)/2}\eta_R\Big(\eta_R\eta_{\Gamma R}\Big)^k\\&=(-1)^{k(k-1)/2}(-1)^{n(n+1)/2}(-1)^{nk}\\&=(-1)^{k(k-1)/2}(-1)^{n(n+1)/2}(-1)^{-nk}\\&=(-1)^{(n-k)(n-k+1)/2}\end{aligned} \tag{23.30}$$

それゆえ $SO(2n+1)$ において，$D^n\otimes D^n$ のテンソル積の中の k 個の添字の反対称テンソルの対称性は，周期 4 でくり返し，次の表のようになる:

$k \backslash n$	1	2	3	4
0	$-$	$-$	$+$	$+$
1	$+$	$-$	$-$	$+$
2	$+$	$+$	$-$	$-$
3	$-$	$+$	$+$	$-$

(23.31)

よって $SO(3)$ では，1 (スカラー) は反対称，D^1 (ベクトル) は対称である．$SO(5)$ では，1 と D^1 は反対称，D^2 は対称．$SO(7)$ では，D^1 と D^2 が反対称，対して 1 と D^3 は対称．$SO(9)$ では，D^2 と D^3 は反対称，1，D^1，D^4 は対称である．等々!

$SO(2n)$ に対しては，分析はもっと複雑になる．それは，Clifford 代数の作用する 2^n 次元空間が既約ではないからである．我々は既約部分空間への射影演算子

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}\Big(1 \pm \Gamma_{2n+1}\Big) \tag{23.32}$$

を使う．P_+ は D^n へ，P_- は D^{n-1} へ，それぞれ射影する．一般の $2^n \times 2^n$ 行列は，生成子との交換関係の下でテンソル積

$$\Big(D^n \oplus D^{n-1}\Big)\Big(\overline{D}^n \oplus \overline{D}^{n-1}\Big) \tag{23.33}$$

のように変換する．そこで，射影演算子を用いて四つの可能な変換則のそれぞれに射影することができる．K を任意の $2^n \times 2^n$ 行列とすれば，

$$\begin{aligned}
&P^+ K P^+ \quad は \quad D^n \otimes \overline{D}^n \quad のように\\
&P^- K P^- \quad は \quad D^{n-1} \otimes \overline{D}^{n-1} \quad のように\\
&P^+ K P^- \quad は \quad D^n \otimes \overline{D}^{n-1} \quad のように\\
&P^- K P^+ \quad は \quad D^{n-1} \otimes \overline{D}^n \quad のように
\end{aligned} \tag{23.34}$$

それぞれ変換する．前のように，我々は Γ_j の反対称積から種々な K 行列を作ることができる．我々は今 $SO(2n)$ にだけ興味があるので，Γ_{2n+1} は含める必要はない (それに射影演算子がそれをどのみち ± 1 にしてしまう)．さらに，一旦

Γ_{2n+1} を除外すれば，射影演算子は偶数個または奇数個の Γ_j の積を選び出す．なぜなら他の Γ 達は Γ_{2n+1} と反可換なので

$$\Gamma_j \, P_+ = P_- \, \Gamma_j \quad (\, j = 1, \cdots, 2n) \tag{23.35}$$

だからである．したがって，P_+ と P_- (どちらの順でも) の間では奇数個の Γ だけが，そして二つの P_+，あるいは二つの P_-，の間では偶数個の Γ だけが，現れうる．前と同様，階数 $m > n$ のテンソルは考えなくて良い．

23.4 自己双対性

n 階のテンソルに対しては微妙なことがさらに起こる．$D^n \otimes \overline{D}^n$ あるいは $D^{n-1} \otimes \overline{D}^{n-1}$ の中の n 階反対称テンソルの成分はすべてが独立な訳ではない．例えば，$D^n \otimes \overline{D}^n$ において

$$\begin{aligned} & P_+ \, \Gamma_1 \, \Gamma_2 \cdots \Gamma_n \, P_+ = P_+ \, \Gamma_1 \, \Gamma_2 \cdots \Gamma_n \, \Gamma_{2n+1} \, P_+ \\ & = (-i)^n \, P_+ \, \Gamma_1 \cdots \Gamma_n \, \Gamma_1 \cdots \Gamma_{2n} \, P_+ \\ & = (-i)^n \, (-1)^{n(n-1)/2} \, P_+ \, \Gamma_{n+1} \, \Gamma_{n+2} \cdots \Gamma_{2n} \, P_+ \\ & = (-i)^{n^2} \, \frac{1}{n!} \, \epsilon_{12\cdots n \, j_1 \cdots j_n} \, P_+ \, \Gamma_{j_1} \cdots \Gamma_{j_n} \, P_+ \end{aligned} \tag{23.36}$$

明らかに n 階テンソルは自己双対性条件を満たす．その性質は n に依る．n が偶数なら，関係式は実であり，テンソルは，

$$A_{j_1 \cdots j_n} = \frac{1}{n!} \, \epsilon_{j_1 \cdots j_n \, k_1 \cdots k_n} \, A_{k_1 \cdots k_n} \tag{23.37}$$

を満たす**自己双対** (self-dual) テンソル ($D^n \otimes \overline{D}^n$ の時) か，あるいは

$$A_{j_1 \cdots j_n} = -\frac{1}{n!} \, \epsilon_{j_1 \cdots j_n \, k_1 \cdots k_n} \, A_{k_1 \cdots k_n} \tag{23.38}$$

を満たす**反自己双対** (anti-self-dual) テンソル ($D^{n-1} \otimes \overline{D}^{n-1}$ の時)，である．

他方，n が奇数なら，関係式は複素になる:

$$A_{j_1 \cdots j_n} = \pm i \, \frac{1}{n!} \, \epsilon_{j_1 \cdots j_n \, k_1 \cdots k_n} \, A_{k_1 \cdots k_n} \tag{23.39}$$

それゆえ，表現は複素である．$SO(4n+2)$ のスピノール表現の複素性が通常のテンソル表現で明白になるのは，この複素自己双対性条件を通してである．

$SO(2n)$ に対し，n が偶数の場合，$\overline{D^n} = D^n$ および $\overline{D^{n-1}} = D^{n-1}$，$n$ が奇数の場合，$\overline{D^n} = D^{n-1}$ および $\overline{D^{n-1}} = D^n$，という事実を組み込んで，このすべてを下にまとめる．m 階反対称テンソルは (m) と記す．

$$
\begin{aligned}
SO(2n+1):\ & D^n \otimes D^n = \sum_{k=0}^{n} (k) \\
SO(4m):\ & D^{2m} \otimes D^{2m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} (2k+1) \\
& D^{2m} \otimes D^{2m} = \sum_{k=0}^{m-1} (2k) + (2m)_+ \\
& D^{2m-1} \otimes D^{2m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} (2k) + (2m)_- \\
SO(4m+2):\ & D^{2m+1} \otimes D^{2m} = \sum_{k=0}^{m} (2k) \\
& D^{2m+1} \otimes D^{2m+1} = \sum_{k=0}^{m-1} (2k+1) + (2m+1)_1 \\
& D^{2m} \otimes D^{2m} = \sum_{k=0}^{m-1} (2k+1) + (2m+1)_2
\end{aligned}
\tag{23.40}
$$

ここに $(2m)_\pm$ は，それぞれ，自己双対および反自己双対テンソルであり，$(2m+1)_1$ および $(2m+1)_2$ は，複素自己双対性条件を満たすテンソルである．

23.5 例: $SO(10)$

例として $SO(10)$ の 16 次元表現の D^5 を考えよう．上の結果 (23.40) より

$$16 \otimes 16 = (1) \oplus (3) \oplus (5)_1 \tag{23.41}$$

(1) は 10 次元ベクトル，(3) は $10 \cdot 9 \cdot 8/6 = 120$ 次元の 3 階反対称テンソルである．(5) は 複素自己双対性条件を満たす 5 階反対称テンソルで，次元は

$$\frac{1}{2}\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 126 \tag{23.42}$$

同じ二つの16表現の交換の下でのこれらの対称性は，$SO(2n+1)$ に対する $\Gamma_j R$ の対称性の議論を振り返ればわかる —— この場合は，Clifford 代数の 2^5 次元空間に焦点を当てるべく $n=5$ である．(k) に対する対称性因子は $(-1)^{(n-k)(n-k-1)/2}$ で，(1) と (5) は対称，(3) は反対称である．

同様に

$$16 \otimes \overline{16} = (0) \oplus (2) \oplus (4) = 1 \oplus 45 \oplus 210 \tag{23.43}$$

23.6 $SU(n)$ 部分代数

今や我々は $SO(2n)$ の $SU(n)$ 部分群を同定することができる．Clifford 代数から

$$\begin{aligned} A_j &= \frac{1}{2}\Big(\Gamma_{2j-1} - i\,\Gamma_{2j}\Big) \\ A_j^\dagger &= \frac{1}{2}\Big(\Gamma_{2j-1} + i\,\Gamma_{2j}\Big) \end{aligned} \tag{23.44}$$

を作れる．Clifford 代数により，これらは反交換関係

$$\begin{aligned} \{A_j,\, A_k\} &= \Big\{A_j^\dagger,\, A_k^\dagger\Big\} = 0 \\ \Big\{A_j,\, A_k^\dagger\Big\} &= \delta_{jk} \end{aligned} \tag{23.45}$$

を満たす．したがって，これは一組の生成・消滅演算子になっており，我々は既にそのような量から $SU(n)$ 代数を構成する方法を知っている．$SU(n)$ の定義表現の行列要素 $[T_a]_{jk}$ を使って，

$$T_a = \sum_{j,k} A_j^\dagger\,[T_a]_{jk}\,A_k \tag{23.46}$$

を定義する．我々は T_a が Clifford 代数の 2^n 次元空間上で $SU(n)$ を生成することを知っているが，それが $SO(2n)$ の部分代数であることも示さねばならない．これを見るため，

$$\begin{aligned} A_j^\dagger A_k = \frac{1}{2}\Big\{A_j^\dagger,\, A_k\Big\} + \frac{1}{2}\Big[A_j^\dagger,\, A_k\Big] = \frac{1}{2}\delta_{jk} \\ +\frac{i}{2}M_{2j-1,2k-1} + \frac{1}{2}M_{2j-1,2k} - \frac{1}{2}M_{2j,2k-1} + \frac{i}{2}M_{2j,2k} \end{aligned} \tag{23.47}$$

と書くことができる．$[T_a]_{jk}$ はトレースがゼロなので δ_{jk} 項は T_a に寄与しない．他の項は $SO(2n)$ 生成子である．よって T_a は，$SO(2n)$ 生成子の線形結合であり，$SO(2n)$ の部分代数を生成する．

すべての A_j で消される状態を $|0\rangle$ と記そう．我々の Clifford 代数の表現ではすべての A_j は降演算子 σ_-^j に比例したので，$|0\rangle$ は，すべての σ_3^j が -1 の状態である．それは偶数の n の場合は表現 D^n に入っており，奇数の n の場合は D^{n-1} に入っている．

いつものように，生成演算子 $A_j^\dagger$ はテンソル演算子である:

$$\left[T_a,\, A_j^\dagger\right] = \sum_k A_k^\dagger\, [T_a]_{kj} \tag{23.48}$$

それらは $SU(n)$ の n 次元定義表現として変換する．

それゆえ，$|0\rangle$ にいくつか，例えば m 個，の $A^\dagger$ を作用させたとき，$A^\dagger$ は反交換するので，m 個の n 表現の反対称なテンソル積のように変換する状態が得られる．これは基本表現 $[m]$ である．その他の点では，この構成法は我々が 3 次元調和振動子でやったことと同様である．

m が偶数の時，$|0\rangle$ に m 個の $A^\dagger$ を作用させて作られる状態は $|0\rangle$ 状態と同じ $SO(2n)$ の既約表現に入っている．Γ_{2n+1} は，各 $A^\dagger$ と反交換するので，偶数個の積とは交換するからである．一方 m が奇数の時は，その状態は他の $SO(2n)$ の既約表現に入っている．

これらをすべてまとめて，$SU(n)$ の $SO(2n)$ への埋め込みを次のように要約することができる．$SO(4n+2)$ に対して，

$$D^{2n+1} = \sum_{j=0}^{n} [2j+1]\,, \qquad D^{2n} = \sum_{j=0}^{n} [2j] \tag{23.49}$$

$\overline{[j]} = [2n+1-j]$ だから，これは $\overline{D^{2n}} = D^{2n+1}$ という事実と整合的である．

$SO(4n)$ に対し，

$$D^{2n} = \sum_{j=0}^{n} [2j]\,, \qquad D^{2n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} [2j+1] \tag{23.50}$$

上で我々が構成した $SU(n)$ 部分群の生成子すべてと交換する $SO(2n)$ 生成子が一つ存在する．それは

$$S = \sum_{j=1}^{n} M_{2j-1,2j} = \sum_{j=1}^{n} A_j^\dagger A_j - \frac{n}{2} \tag{23.51}$$

S は $U(1)$ 部分代数を生成する．Clifford 代数の空間で

$$S = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sigma_3^j \tag{23.52}$$

よって $S|0\rangle = -\frac{n}{2}|0\rangle$．そのとき，$\left[S,\, A_j^\dagger\right] = A_j^\dagger$ だから，生成演算子は S の値を上げる．したがって，$SO(2n)$ のスピノール表現中の ($SU(n)$ 既約) 表現 $[m]$ の状態は，$S = m - n/2$ の値を持つ．

問題

23.A. 二項定理を用いて，(23.49) と (23.50) において両辺の次元がうまく一致していることを確かめよ．

23.B. (23.9) と (23.44) を用いて，$SO(2n)$ のベクトル表現 D^1 が $SU(n)$ の下でどのように変換するのかを決定せよ．またこの結果が何故明らかなのかを説明せよ．

23.C. $u^{jk\ell}$ を $SO(6)$ における完全反対称テンソルとする．自己双対性条件は

$$u^{jk\ell} = \lambda\, \epsilon^{jk\ell abc}\, u^{abc}\,.$$

の形を持つ．λ の可能な値を答えよ．

23.D. $SO(14)$ のスピノール表現は次の部分群の下でどのように変換するのかを答えよ:

a. $SU(7)$

b. $SO(4) \times SU(5)$

第24章

$SO(10)$

$SU(5)$ は，我々の実際に見ている物質粒子だけを使う，統一理論の代数に対する唯一の選択である．しかしながら，このことが必要な属性かどうかは自明ではない．統一理論の対称性は，何であろうとも (ともかく存在すると仮定して)，我々の見る相互作用の違いを説明するためには，自発的に破れていなければならない．自発的な対称性の破れの過程が，ある表現の物質粒子のいくつかに大きな質量を与え，実効的にそれらを除去する，ということはあり得る．$SU(5)$ の次に最も簡単な統一理論は，代数 $SO(10)$ に基づくものだが，そのような粒子を一個だけ – 右手型ニュートリノ – を加える．

24.1　$SO(10)$ と $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$

$n = 2$ に対する (23.49) を考慮して $SO(10)$ 統一理論の議論を始めよう．これは，$SO(10)$ のスピノール表現に含まれる $SU(5)$ 既約成分が次のようになることを示している:

$$
\begin{aligned}
D^5 &= [1] + [3] + [5] = 5 + \overline{10} + 1\,, \\
D^4 &= [0] + [2] + [4] = 1 + 10 + \overline{5}\,.
\end{aligned}
\tag{24.1}
$$

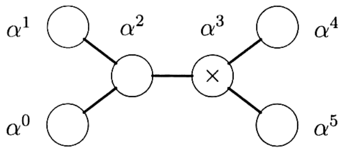
したがって D^5 は，一世代のクォーク・レプトンの右手型粒子の生成演算子を記述する正しい $SU(5)$ 多重項と，一つの余分な $SU(5)$ 1重項を含んでいる．同じく D^4 は，左手型粒子の生成演算子プラス1重項のように振舞う．

したがって $SO(10)$ は，一世代のすべての生成演算子を単一の既約表現に統合するという興味深い特徴を持っている．もちろん，それは我々が世界で観測したどの粒子にも対応しない余分な1重項も組みこんでいる．しかし，この余

分な粒子は対称性の自発的破れの過程で大きな質量を得ることを期待できるのである．

この余分な1重項粒子は，我々の実際に観測する粒子とおもしろい仕方で関係している．それを含めれば，我々は $SU(5)$ においては失われていたパリティ対称性を回復することができるのである．何が起こっているかを理解するため，$SO(10)$ の別の部分群を調べることにしよう．

$SO(10)$ の $SU(5)$ 部分代数は正則であるが，極大ではない．それは Dynkin 図形から丸の一つを除いて得られるものである．正則極大部分代数を見つけるべく，その拡大 Dynkin 図形を考えよう:



(24.2)

× の印を付けた丸を取り除いた図形は分離して，$SU(2) \times SU(2) \times SU(4)$ になる．$SU(2) \times SU(2)$ は $SO(4)$ と同じ代数であり，$SU(4)$ は $SO(6)$ と同じであるから，これは4および6次元部分空間上にブロック対角な10次元回転生成子の作る部分代数である．

我々は Dynkin 図形をかなり直接的に利用して，スピノール表現がこの部分群の下でどのように変換するかを理解することができる．D^5 のウェイトは，(22.5)-(22.7) より

$$\sum_{i=1}^{5} \eta_i e^i/2\,, \quad \text{ただし} \quad \prod_{i=1}^{5} \eta_i = 1 \tag{24.3}$$

である．我々は拡大 Dynkin 図形の形から，部分群 $SU(4)$ (または $SO(6)$) がルート α^1，α^2，α^0 (最低ルート) を持つことを知っている．あらわには

$$\alpha^1 = e^1 - e^2\,, \qquad \alpha^2 = e^2 - e^3\,, \qquad \alpha^0 = -e^1 - e^2\,. \tag{24.4}$$

したがって $SU(4)$ 部分代数のルートは，ウェイト空間で最初の3成分により張られる3次元部分空間に完全に入っている．ウェイト (24.3) は，$SO(6)$ の二つのスピノール表現 ($\eta_1\eta_2\eta_3 = 1$ のもの (D^3) と，$\eta_1\eta_2\eta_3 = -1$ のもの (D^2)) の各々の二重のコピーに分解する．

$SU(2) \times SU(2)$ (または $SO(4)$) 部分群はルート

$$\alpha^4 = e^4 - e^5\,, \qquad \alpha^5 = e^4 + e^5 \tag{24.5}$$

に対応し，これらはウェイト空間の最後の2成分によって張られる2次元部分空間に入っている．α^4 は一つの $SU(2)$ を生成し，その下でウェイト

$$\pm(e^4 - e^5) \tag{24.6}$$

は2重項をなす．α^5 も一つの $SU(2)$ を生成し，その下でウェイト

$$\pm(e^4 + e^5) \tag{24.7}$$

が2重項をなす．したがって，ウェイト

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\eta_i e^i\right)/2 \pm (e^4 + e^5)/2 \quad (\eta_1\eta_2\eta_3 = 1) \tag{24.8}$$

は，$SO(6)$ の下でスピノール (あるいは等価だが，$SU(4)$ の 4)，α^4 に付随する $SU(2)$ の下で1重項，α^5 に付随する $SU(2)$ (これを最初の $SU(2)$ と区別して $SU(2)'$ と呼ぶ) の下で2重項，として変換する，$SO(6) \times SO(4)$ 部分代数の一つの表現に対応している．すなわち，$SU(4) \times SU(2) \times SU(2)'$ 部分群の下で，(24.8) は $(4, 1, 2)$ である．

ウェイト

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\eta_i e^i\right)/2 \pm (e^4 - e^5)/2 \quad (\eta_1\eta_2\eta_3 = -1) \tag{24.9}$$

は，$SO(6)$ の下で複素共役スピノール (あるいは等価だが，$SU(4)$ の $\overline{4}$)，α^4 に付随する $SU(2)$ の下で2重項，α^5 に付随する $SU(2)$ の下で1重項，として変換する．すなわち，$SU(4) \times SU(2) \times SU(2)'$ 部分群の下で，(24.9) は $(\overline{4}, 2, 1)$ である．

したがって，$SU(4) \times SU(2) \times SU(2)'$ の下で

$$D^5 \to (4, 1, 2) \oplus (\overline{4}, 2, 1) \tag{24.10}$$

となる．その結果，複素共役表現 D^4 が次のように分解することが従う:

$$D^4 \to (\overline{4}, 1, 2) \oplus (4, 2, 1) \tag{24.11}$$

$SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$ の $SU(4)$ はカラー $SU(3)$ を含む．各 4 は，$SU(3)$ の下で $3 \oplus 1$ であり，各 $\overline{4}$ は $\overline{3} \oplus 1$ である．(24.10) を (18.13) と比べてみれば，読者は $SO(10)$ による統一が如何にうまくいっているか，より詳しくわか

るだろう．(18.13) での弱い相互作用の $SU(2)$ は，$SO(10)$ の $SU(2)$ 部分群と同定されなければならない．その下で，右手型反クォーク，および右手型陽電子と反ニュートリノ，の生成演算子は，それぞれ 2 重項として変換する．$SO(10)$ の $SU(2)'$ の下で，右手型クオークの生成演算子は 2 重項であり，また，右手型の電子とある中性粒子の生成演算子から成るもう一つの 2 重項が存在する．この $SU(2)'$ は，弱い相互作用の $SU(2)$ の鏡映像である．もし我々が D^4 表現の左手型場の生成演算子を見ることにすれば，反クオークが $SU(2)'$ の下での 2 重項となる．ちょうど D^5 表現の右手型の反クオークが $SU(2)$ の下での 2 重項であるように．かくして，右手型電子と $SU(2)'$ 2 重項を成す中性のパートナー粒子は，左手型ニュートリノの鏡版である右手型ニュートリノと同定すべきである．

$SO(10)$ による統一は，$SU(5)$ では完全に失われた理論の鏡映対称性をこのようにして完全に回復するのである．もちろん物理現象は鏡映対称ではない．パリティは破れている．右手型ニュートリノは観測されたことはない．もし $SO(10)$ による統一が世界を記述するならば，右手型ニュートリノや $SU(2)'$ 生成子 (および $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ 部分群以外の他のすべての $SO(10)$ 生成子) に付随する粒子たちを大変重くする，ある対称性の破れが存在しなければならない．

24.2 * $SO(10)$ の自発的破れ

$SO(10)$ の $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ への自発的破れは，何段階かで考えることができる．まず，どのように $SO(10)$ が $SU(5)$ に破れるか?と問うことができる．それから，我々は，どんな $SO(10)$ 表現が，$SU(5)$ 部分群をさらに $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ へ破るために使われる $SU(5)$ の 24 を含むのかを問うことができる．最後に，どんな $SO(10)$ 表現が，$SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ を電磁気の電荷の $U(1)$ に破るために使われる $SU(5)$ の 5 や 45 を含むのかを問うことができる．

24.3 * $SO(10)\to SU(5)$ の破れ

$SO(10)$ を $SU(5)$ へ破ることのできる最も簡単な表現は 16 (あるいは $\overline{16}$) である．このことは (24.1) から明らかである．16 は $SU(5)$ 部分群の下で 1 重項として変換する成分を持っており，もしその成分が真空値を持てば，$SO(10)$ 対称性は $SU(5)$ へ自発的に破れるだろう．$SO(10)$ の最初の議論ではこの表現が

使われた．しかしながら，それには少し魅力的でない点があった．それは (少なくとも古典論レベルでは) 右手型ニュートリノに大きな質量を与えるのに使えなかった．右手型ニュートリノを取り除くための何らかの機構を持つことが重要である．それはこれまで観測されていないし，もし存在したならば，素粒子物理にも宇宙論にも問題を起こすだろう．$SO(10)$ の元の議論では，16 に加えて $SO(10)$ 1 重項のニュートリノの存在を仮定した．そうすれば，16 Higgs 表現が 右手型ニュートリノをこの余分な 1 重項と一緒にして質量のある粒子にするのに使え，それで見えない右手型ニュートリノを低エネルギーの粒子スペクトルから消すことができる．

これに関して魅力的でない点は，余分な 1 重項を加えることが一歩後退かもしれないことである．$SU(5)$ 模型は既に右手型粒子を二つの既約表現に統一した．余分な 1 重項のない $SO(10)$ 模型は，最も軽い世代のすべての粒子を単一の既約表現に入れており，多分もっと "統一" されている．しかし，余分な 1 重項を持つ $SO(10)$ 模型は，元の $SU(5)$ 模型の不必要な複雑化のように見える．1 重項を加えないで右手型ニュートリノを消去することは可能であろうか? 答えは，少し特異なひねりを加えれば，yes である．右手型ニュートリノをそれ自身の反粒子と同じに扱うことができ，その質量を与える Higgs 場を二つの 16 のテンソル積の中に見つけるのである．前と同様，$SU(5)$ 1 重項の右手型ニュートリノに質量を与えることができるためには，Higgs 表現の真空値は $SU(5)$ 1 重項でなければならない．

二つの 16 のテンソル積は

$$10 \oplus 120 \oplus 126 \tag{24.12}$$

で，10 は $SO(10)$ ベクトル，120 は 3 階反対称テンソル，126 は複素自己双対な 4 階反対称テンソルである．10 と 126 は，二つの 16 のテンソル積において対称に，120 は反対称に，現れる (二つの 16 は同じ表現であり，そのテンソル積は S_2 の表現により分類できるからである)．そうすると，これらの $SO(10)$ 表現の各々が含む $SU(5)$ 既約成分は，(24.1) の D^5 のそれ自身とのテンソル積をとってみれば容易に算定することができる．反対称部分は，

$$\begin{aligned}
&(5+\overline{10}+1)\otimes(5+\overline{10}+1)_{AS} \\
&\quad = (5\otimes 5)_{AS}\oplus(\overline{10}\otimes\overline{10})_{AS}\oplus(5\otimes\overline{10})\oplus(5\otimes 1)\oplus(\overline{10}\otimes 1) \\
&\quad = 10\oplus 45\oplus\ \overline{5}\oplus\overline{45}\oplus 5\oplus\overline{10}
\end{aligned} \tag{24.13}$$

これが実表現であることに注意しよう．対称部分は

$$
\begin{aligned}
&(5+\overline{10}+1) \otimes (5+\overline{10}+1)_S \\
&\quad = (5 \otimes 5)_S \oplus (\overline{10} \otimes \overline{10})_S \oplus (1 \otimes 1)_S \oplus (5 \otimes \overline{10}) \oplus (5 \otimes 1) \oplus (\overline{10} \otimes 1) \\
&\quad = 15 \oplus 5 \oplus 50 \oplus 1 \oplus \overline{5} \oplus \overline{45} \oplus 5 \oplus \overline{10}
\end{aligned} \tag{24.14}
$$

$SO(10)$ の 10 は ($SU(5)$ の) $5+\overline{5}$ なので，126 は

$$
15 \oplus 50 \oplus 1 \oplus \overline{45} \oplus 5 \oplus \overline{10} \tag{24.15}
$$

この表現は複素であり，我々が右手型ニュートリノに質量を与えるために欲しい $SU(5)$ 1 重項成分を含んでいる．$SU(5)$ 1 重項の真空値は他のどの粒子にも質量を与えられないから，これは特に有用である．他の粒子の質量には $SU(2) \times U(1)$ を破る真空値が必要だからである．それゆえ，126 の中の $SU(5)$ 1 重項成分の真空値が大変大きいと，右手型ニュートリノに大きな質量を与えるが，他のすべての粒子は $SU(2) \times U(1)$ を破る Higgs 場の真空値が生じるまで質量ゼロにとどまる．後者の真空値ははるかに小さくできる (実際 $SU(5)$ 統一理論の場合のように，結合定数が正しく出てくるためには，それははるかに小さくなければならない)．このことは何故右手型ニュートリノが観測されないのかを説明する —— それは他のすべてのフェルミ粒子よりもはるかに重いのである．

126，あるいは 16 と余分な 1 重項，のどちらかを使えば，我々は右手型ニュートリノを取り除き，$SO(10)$ 対称性を $SU(5)$ へ破ることができる．そうして次に，我々は我々が $SU(5)$ の破れのために議論した $SU(5)$ の表現をどんな $SO(10)$ 表現が含むかを問うことで $SU(5)$ のさらなる破れを議論することができる．

24.4　* $SO(10) \to SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ の破れ

$SU(5)$ の場合と同様，考慮すべき明らかな表現は随伴表現，45 次元表現 D^2 で，2 階反対称テンソルである．この $SO(10)$ 表現が $SU(5)$ の下でどう変換するか考えよう．二つの 10 の反対称テンソル積が 45 であることに注意すればこの答えを見つけることができる．10 は $5 \oplus \overline{5}$ だから， 45 は

$$
45 \to 24 + 10 + \overline{10} + 1 \tag{24.16}
$$

これは心強い結果である．(24.16) が $SU(5)$ 24 を含んでいるので，我々は $SO(10)$ を $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ へ破る可能な真空値が一つ見つけられると期待するかも知れない．

ところが，ことはそれほど単純ではない．この反対称テンソルの最も一般的な真空値は $SO(10)$ 変換によって次の正準形へ持って行ける:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_5 & 0 \end{pmatrix} \tag{24.17}$$

これが $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ と可換になる唯一の可能性は，二つの a，例えば a_1 と a_2 が等しくなり，他の三つの a も等しくなって，真空値が

$$\begin{pmatrix} a_1\, I_2\, i\sigma_2 & 0 \\ 0 & a_3\, I_3\, i\sigma_2 \end{pmatrix} \tag{24.18}$$

の形をとる場合である．ここで，最初のブロックは二つの 2 次元空間のテンソル積で書いた 4×4 行列で，2 番目のブロックは同じように 2 次元と 3 次元空間のテンソル積で書いた 6×6 行列である．これは

$$\begin{pmatrix} A_2 + \sigma_2\, S_2 & 0 \\ 0 & A_3 + \sigma_2\, S_3 \end{pmatrix} \tag{24.19}$$

の形の行列と交換する．ただし A たちは反対称な，S たちは対称な，それぞれ適当な空間での，行列をあらわす．$A_2+\sigma_2 S_2$ は $SU(2)\times U(1)$ を生成し，$A_3+\sigma_2 S_3$ は $SU(3) \times U(1)$ を生成する．我々の欲しくない余分な $U(1)$ がここにあるが，それは 16 ないしは 126 の真空値で壊れる．したがって，16 ないしは 126 と一緒にあれば，45 は要求される $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ への対称性の破れを起こすことができる．

$SO(10)$ の破れに対しては他の選択肢もある．ここでは一つにだけ触れておこう．対称性は，トレースゼロの実対称テンソルの 54 表現の真空値で破ることができる．この場合も簡単に解析できる．というのは 45 の場合と同様，それは $SO(10)$ 変換を用いて，簡単な正準形に持ってゆくことができるからである．実はこの場合はさらにもっと簡単である —— 54 は対角化できる:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{10} \end{pmatrix} \tag{24.20}$$

ただし

$$\sum_{j=1}^{10} a_j = 0 \tag{24.21}$$

これが $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ と可換になる唯一の可能性は，$SU(2)\times U(1)$ を含む $SO(4)$ が破れずに残るように四つの a が等しく，$SU(3)$ を含む $SO(6)$ が破れずに残るように六つの a が等しい，という場合である．それゆえ，$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ を保つ 54 の真空値は自動的により大きな対称性 $SO(6)\times SO(4)$ を保存する．これは実はちょうど我々がこの節の始めに議論した $SU(2)\times SU(2)\times SU(4)$ 部分群である．ところが実際，これは我々が 54 から必要とするもの全てなのである．16 や 126 の真空値は，残った $SU(2)\times SU(2)\times SU(4)$ 対称性を $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ まで破ってくれる．

24.5 * $SO(10) \to SU(3) \times U(1)$ の破れ

最後に，どういう $SO(10)$ 表現が $SU(2) \times U(1)$ の破れを引き起こし，クォークとレプトンに質量を与えることができるのかを考察しよう．我々は，これらが $SU(5)$ の 5 あるいは 45 を含まねばならないこと，そしてそれらが二つの 16

のテンソル積 (24.12) に含まれるべきであること，を見た．この 16×16 の中の三つの表現のどれでもうまくいくことがわかる．それぞれは，異なる電荷やカラーの粒子達に対し，いくらか違ったパターンの質量関係を与える．

24.6 ＊第4番目のカラーとしてのレプトン数

$SO(10)$ の $SU(2) \times SU(2)' \times SU(4)$ 部分群について言っておくに値することがもう一つある．この代数は，$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 対称性を**半単純**代数に含める場合の最も小さなものということで興味深い．これは，自動的に電磁気の電荷の量子化を導くので，物理的におもしろいのである．電荷の量子化には単純群は必ずしも要らない．交換関係で縛られないのは $U(1)$ 因子だけなのである．上で述べたように，$SU(2)'$ 因子は，電弱 $SU(2)$ の右手型版である．それ故この模型では，電弱相互作用が左手型であるという性質は，代数によってではなく，真空 —— すなわち，自発的に $SU(2)'$ を $SU(2)$ よりもはるかに強く破るもの，によって選び出されている．ところが，$SU(4)$ もまた大変おもしろい．それは，レプトン数を第4番目のカラーとして扱っていると考えることができるからである．ニュートリノは三つのカラーの u と共に $SU(4)$ 4 を構成し，電子は三つのカラーの d と共に $SU(4)$ 4 を構成する．レプトンをクォークと区別するのは，カラー $SU(3)$ 部分群を破らずに残す自発的対称性の破れだけである[1]．

問題

24.A. $\vec{\sigma}$，$\vec{\tau}$，$\vec{\eta}$，$\vec{\rho}$ を独立なパウリ行列の組としたとき，

$$\frac{1}{2}\vec{\sigma}\,,\ \frac{1}{2}\vec{\tau}\,,\ \frac{1}{2}\vec{\eta}\,,\ \frac{1}{2}\vec{\sigma}\rho_1\,,\ \frac{1}{2}\vec{\tau}\rho_2\,,\ \frac{1}{2}\vec{\eta}\rho_3\,,\ \frac{1}{2}\vec{\sigma}\vec{\tau}\rho_3\,,\ \frac{1}{2}\vec{\tau}\vec{\eta}\rho_1\,,\ \frac{1}{2}\vec{\eta}\vec{\sigma}\rho_2\,,$$

の 45 個の行列が $SO(10)$ のスピノール表現を生成することを示せ．また，一方の $SU(2)$ が $\vec{\eta}(1+\rho_3)/4$ で生成される部分群 $SU(2) \times SU(2) \times SU(4)$ を見つけよ．

[1] この考え方は，$SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$ 模型と共に，統一理論の重要な先駆けであり，J. Pati と A. Salam の論文 Phys. Rev. **D 10** (1974) 275 で初めて議論された．

24.B. 最高ウェイト $2\mu^5$ を持つ $SO(10)$ の表現は何次元か? どのようにすればそれがわかるか? ヒント: $D^5 \otimes D^5$ を考えよ.

第 25 章

自己同型

群 G の**自己同型** (automorphism) A とは，群の掛け算則を保つような G からそれ自身への写像である:

$$A(g_1 g_2) = A(g_1)\, A(g_2) \tag{25.1}$$

リー群に対して，群の自己同型は，交換関係を保つようなリー代数からそれ自身への写像を誘起する．一つの自己同型の下で，生成子は生成子の線形結合に写され，

$$T_a \to A_{ab}\, T_b \tag{25.2}$$

交換関係

$$[T_a,\, T_b] = i\, f_{abc}\, T_c \tag{25.3}$$

を保つことより，次式を満たす:

$$[A_{aa'} T_{a'},\, A_{bb'} T_{b'}] = i\, f_{abc}\, A_{cc'} T_{c'} \tag{25.4}$$

25.1 外部自己同型

自己同型は，ある場合には，それが生成子の上に誘起する写像が単なる同値関係 (相似変換)

$$A_{ab}\, T_b = R\, T_a\, R^{-1} \tag{25.5}$$

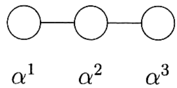
であるという意味で自明である．ここで $R = e^{i\theta_a T_a}$ は群の元である．これは，**内部自己同型** (inner automorphism) と呼ばれる．しかしリー代数のあるものは，自明でない自己同型，すなわち**外部自己同型** (outer automorphism) を持つ．

例として複素共役を考えよう．T_a をある表現における生成子としたとき，写像

$$T_a \to -T_a^* \tag{25.6}$$

は，純虚反対称行列に対応する生成子は変えずに，実対称行列に対応する生成子は符号を変えるという自己同型である (最高ウェイトによる構成法において常に生成子を対称もしくは反対称に選べることに注意せよ)．したがって，リー代数は，自明でない自己同型を持つときのみ複素表現を持ち得る．

我々は，Dynkin 図形の対称性を見ることによって自明でない自己同型を同定することができる．たとえば，Dynkin 図形



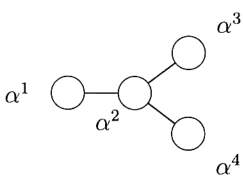
(25.7)

を持つ $SU(4)$ を考えよう．α^1 と α^3 は対称に現われているので，α^1 と α^3 を入れ替えた図形は同じ長さと角度を持ち，それゆえ同じ代数を生成する．よって $SU(4)$ には，対応する生成子を入れ替え，

$$E_{\alpha^1} \leftrightarrow , E_{\alpha^3} \tag{25.8}$$

同時に，図形から代数をあらわに構成する際にこの入れ替えの誘起する他のすべての変換を行なうことによって得られる，一つの自己同型が存在する．この自己同型は，同値でない基本表現 D^1 と D^3 とを入れ替えるので，明らかに自明でない．実際，この二つの表現はお互いの複素共役表現だから，これはちょうど (自明な同値を除いて) 複素共役により誘起される自己同型になっている．複素共役自己同型のすべては，このようにして得られ，Dynkin 図形の鏡映対称性に付随している．

しかし，全ての鏡映対称性が複素共役に対応しているわけではない．例えば，$SO(4n)$ 群は実表現のみを持っている．それゆえ，それらの Dynkin 図形が持つ鏡映対称性は，複素共役ではない非自明な自己同型に対応している．このことの最もおもしろい (かつ風変わりな) 例は，Dynkin 図形



(25.9)

を持つ群 $SO(8)$ である．ここでは α^1，α^3，α^4 の置換の各々に対し別々の自己同型が存在する．

25.2 $SO(8)$ の愉しみ

$SO(8)$ の Dynkin 図形のルートは

$$\alpha^j = e^j - e^{j+1} \;\; (j = 1, \cdots, 3), \quad \alpha^4 = e^3 + e^4 \tag{25.10}$$

最高ウェイト μ^1，μ^3，μ^4 を持つ基本表現 D^1，D^3，D^4 は，それぞれ 8 次元である．D^1 は定義表現 (8-ベクトル)，D^3 と D^4 は二つの実スピノール表現である．自己同型はこれら三つの表現をすべての可能なやりかたで入れ替えるものである．

先ず D^3 と D^4 の間の写像を考える．これは，α^1 と α^2 を固定しておいて，α^3 と α^4 を交換する Dynkin 図形の対称性に対応している．これは e^4 の符号を変えることで実現できる．実際それは

$$H_4 \to -H_4 \quad \text{あるいは} \quad M_{78} \to -M_{78} \tag{25.11}$$

および

$$E_{\eta e^j + e^4} \leftrightarrow E_{\eta e^j - e^4} \quad \text{あるいは} \quad M_{j8} \to -M_{j8} \tag{25.12}$$

を意味している．事実これは，我々がこれらの表現をあらわに作ったときに見つけたことである．M_{jk} $(j, k = 1, \cdots, 7)$ は両方の表現で同じで，一方，

$$H_4 = M_{78} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\sigma_3^1\sigma_3^2\sigma_3^3 & D^3 \text{ のとき} \\ \dfrac{1}{2}\sigma_3^1\sigma_3^2\sigma_3^3 & D^4 \text{ のとき} \end{cases} \tag{25.13}$$

残りは交換関係から従う．もちろん，ここではこの結果を，表現をあらわに構成することなしに直接 Dynkin 図形の対称性だけから得たのである．

次に，α^2 と α^4 を固定し，α^1 と α^3 を入れ替える自己同型同形を調べよう．これはかなり不可思議なものである．というのも，それが，二つだけゼロでない要素を持った反対称行列を生成子とするベクトル表現 D^1 と，2 乗が単位行列に比例する，パウリ行列の積を生成子とするスピノール表現 D^3 とを，入れ替え

るものだからである．ウェイトの言葉で言えば，この写像は

$$
\begin{aligned}
&e^1 - e^2 \leftrightarrow e^3 - e^4 \\
&e^2 - e^3 \rightarrow e^2 - e^3 \\
&e^3 + e^4 \rightarrow e^3 + e^4
\end{aligned}
\tag{25.14}
$$

これを e^j について解けば，

$$
\begin{aligned}
e^1 &\rightarrow \frac{1}{2}\left(e^1 + e^2 + e^3 - e^4\right) \\
e^2 &\rightarrow \frac{1}{2}\left(e^1 + e^2 - e^3 + e^4\right) \\
e^3 &\rightarrow \frac{1}{2}\left(e^1 - e^2 + e^3 + e^4\right) \\
e^4 &\rightarrow \frac{1}{2}\left(-e^1 + e^2 + e^3 + e^4\right)
\end{aligned}
\tag{25.15}
$$

を得，よって Cartan 生成子も同じように写される:

$$
\begin{aligned}
H_1 &\rightarrow \frac{1}{2}\left(H_1 + H_2 + H_3 - H_4\right) \\
H_2 &\rightarrow \frac{1}{2}\left(H_1 + H_2 - H_3 + H_4\right) \\
H_3 &\rightarrow \frac{1}{2}\left(H_1 - H_2 + H_3 + H_4\right) \\
H_4 &\rightarrow \frac{1}{2}\left(-H_1 + H_2 + H_3 + H_4\right)
\end{aligned}
\tag{25.16}
$$

あるいは

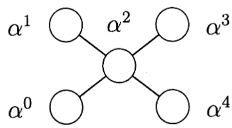
$$
\begin{aligned}
M_{12} &\rightarrow \frac{1}{2}\left(M_{12} + M_{34} + M_{56} - M_{78}\right) \\
M_{34} &\rightarrow \frac{1}{2}\left(M_{12} + M_{34} - M_{56} + M_{78}\right) \\
M_{56} &\rightarrow \frac{1}{2}\left(M_{12} - M_{34} + M_{56} + M_{78}\right) \\
M_{78} &\rightarrow \frac{1}{2}\left(-M_{12} + M_{34} + M_{56} + M_{78}\right)
\end{aligned}
\tag{25.17}
$$

理論が上で言った写像の問題をどんなに賢く解決しているかに注目しよう．ベクトル表現の反対称行列 $M_{2j-1,2j}$ は，

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \pm\sigma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm\sigma_2 \end{pmatrix} \tag{25.18}$$

の形の行列に写像され，その 2 乗は 1/4 になっている．

残りの写像がどうなっているのかは次のようである．他の生成子は 6 組の 4 に分かれ，その各々は，上で扱った四つ M_{12}，M_{34}，M_{56}，M_{78} のようにそれら自身の間で混じり合う．$SO(8)$ は大変おもしろい部分群 —— $SU(2)\times SU(2)\times SU(2)\times SU(2)$ を持っている．これが極大部分群であることは容易に分かる．それは単に $SO(4)\times SO(4)$ である．しかし，自己同型が異なる $SU(2)$ 因子にどう作用しているのか見るのは，教育的である．拡大 Dynkin 図形を見てみよう．それは



(25.19)

ここで最低ルート α^0 は $-e^1-e^2$ である．明らかに，α^2 を取り除けば $SU(2)\times SU(2)\times SU(2)\times SU(2)$ 部分代数が得られる．四つの $SU(2)$ は互いに直交する四つのルート

$$\begin{aligned} \alpha^0 &= -e^1-e^2 \qquad & \alpha^1 &= e^1-e^2 \\ \alpha^3 &= e^3-e^4 \qquad & \alpha^4 &= e^3+e^4 \end{aligned} \tag{25.20}$$

に付随している．ここでスピノール表現 D^3 へのこの部分代数の作用を考えよう．D^3 は，ウェイト

$$\eta_j e^j/2 \qquad \text{for} \qquad \prod_j \eta_j = -1 \tag{25.21}$$

を持つ．これらはこの部分群の下で既約に変換する二組に分解する．組

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(e^1+e^2+e^3-e^4\right), \qquad \frac{1}{2}\left(e^1+e^2-e^3+e^4\right), \\ &\frac{1}{2}\left(-e^1-e^2+e^3-e^4\right), \qquad \frac{1}{2}\left(-e^1-e^2-e^3+e^4\right) \end{aligned} \tag{25.22}$$

は，α^1 と α^4 に直交し，よって α^1 と α^4 に付随する二つの $SU(2)$ の下で 1 重項として自明に変換する．しかし，各ウェイトは，α^0 および α^3 に付随する $SU(2)$ の下での 2 重項の一成分である．同様に，組

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(e^1 - e^2 + e^3 + e^4\right), \qquad \frac{1}{2}\left(e^1 - e^2 - e^3 - e^4\right), \\ &\frac{1}{2}\left(-e^1 + e^2 + e^3 + e^4\right), \qquad \frac{1}{2}\left(-e^1 + e^2 - e^3 - e^4\right) \end{aligned} \tag{25.23}$$

は，α^0 と α^3 に直交し，よってそれら二つの $SU(2)$ の下で自明に変換し，α^1 および α^4 に付随する $SU(2)$ の下での 2 重項の成分である．したがって，

$$SU(2)^0 \times SU(2)^1 \times SU(2)^3 \times SU(2)^4 \tag{25.24}$$

部分群の下で，スピノール表現 D^3 は

$$(2,1,2,1) \oplus (1,2,1,2) \tag{25.25}$$

のように変換する，ということである．

8 の変換則としては，もう二つ同じような他の可能性がある:

$$\begin{gathered} (2,2,1,1) \oplus (1,1,2,2) \\ \text{および} \\ (2,1,1,2) \oplus (1,2,2,1) \end{gathered} \tag{25.26}$$

これらはそれぞれ D^1 および D^4 に対応する．どちらがどちらかについてはどうすればわかるだろうか?

問題

25.A. この章の終りで与えた議論をやり遂げて，章の最後の式のどちらの表現が D^1 で，どちらが D^4 かを決定せよ．

25.B. $SO(8)$ の $SO(5)$ 部分群のうちで，($SO(8)$ の) 一方のスピノール (たとえば D^4) が二つの $SO(5)$ スピノールのように変換し，他方のスピノール (D^3) が一つの $SO(5)$ ベクトルと三つの 1 重項として変換する，というようになるものがあるか? 説明せよ．

第 26 章

$Sp(2n)$

$Sp(2n)$ をもっと詳しく議論したい一つの理由は，それが $SU(n)$ に対して多くの場合より扱いやすい別の記法を導入するうまい口実となるからである．

26.1 $SU(n)$ のウェイト

$SU(n)$ の定義表現のウェイト ν^i （$i=1,\cdots,n$）は，次の性質を持つ:

$$\nu^j \cdot \nu^k = \frac{1}{2}\delta_{jk} - \frac{1}{2n}, \qquad \sum_{j=1}^{n} \nu^j = 0 \tag{26.1}$$

和に関する条件は生成子のトレースがゼロということから従う．n 個の ν^j は $n-1$ 次元空間を張るが，ν^j 達を n 次元空間に次のように埋め込むことによってものごとをもっとはるかに明白にすることができる:

$$\nu^j = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^j - \Sigma/n\right) \tag{26.2}$$

ただし e^j は正規直交基底であり，ベクトル Σ は

$$\Sigma \equiv \sum_{k=1}^{n} e^k \tag{26.3}$$

この書き方では，$SU(n)$ の単純ルートは

$$\alpha^j = \nu^j - \nu^{j+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^j - e^{j+1}\right),\ (j=1,\cdots,n-1) \tag{26.4}$$

の形をとる．これらは同時に $Sp(2n)$ の初めの $n-1$ 個の単純ルートでもある．最後の単純ルートは，ν^j （$j=1,\cdots,n$）に直交する単位ベクトルを ν^{n+1} と記

して,

$$\alpha^n = 2\nu^n + \sqrt{\frac{2}{n}}\,\nu^{n+1} \tag{26.5}$$

で与えられる．ここでポイントは,

$$\nu^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\Sigma \tag{26.6}$$

ととれることである．そうすれば

$$\alpha^n = \sqrt{2}\,e^n \tag{26.7}$$

我々は，$Sp(2n)$ の単純ルートのこの結果を，Dynkin 図形の対応から $SO(2n+1)$ のルートの形と比較することによって，推量することもできたのだが．違いは，ルートの全体の規格化と，最後のルートが他のより (短いのではなく) 長い，という点だけである．しかし，ここでは読者は以前のいくぶん面倒な記法との関連を理解したであろう．

よってルートは

$$\frac{\pm e^j \pm e^k}{\sqrt{2}} \quad (j \neq k) \qquad \text{と} \qquad \pm\sqrt{2}\,e^j \tag{26.8}$$

あるいは，等価に

$$\frac{\pm e^j \pm e^k}{\sqrt{2}} \quad (\text{ 全ての } j, k \text{ }) \tag{26.9}$$

と書くことができる．

$2n$ 次元表現のウェイトは

$$\pm e^j/\sqrt{2} \tag{26.10}$$

よって D^1 は最高ウェイト

$$\mu^1 = e^1/\sqrt{2} \tag{26.11}$$

を持つ．

容易に分かるように，他の基本表現は最高ウェイト

$$\mu^j = \sum_{k=1}^{j} e^k/\sqrt{2} \tag{26.12}$$

を持つ．それは j 個の D^1 の反対称テンソル積に関係している．

26.2 $Sp(2n)$ のテンソル

D^1 の状態が ($SU(n)$ の時のように) 下付き添字を持つテンソルの言葉を作ることにすれば，テンソルの係数は上付き添字を持ち通常のように変換する:

$$(T_a\, u)^\alpha = [T_a]^\alpha_\beta\, u^\beta \tag{26.13}$$

ここで α と β は 1 から $2n$ まで走る．これらを書くには我々の導入したテンソル積記法が一番便利で，$\alpha = (j, x)$ と書き，j は 1 から n まで，x は 1，2 を，走る．そうすると，T_a は定義表現の生成子であり，

$$\epsilon_a\, [T_a]^{jx}_{ky} = \left(\vec{S}^j_k\, \vec{\sigma}^x_y + A^j_k\, \delta^x_y\right) \tag{26.14}$$

の形を持つ．$Sp(2n)$ 生成子の任意の線形結合はこの形を持ち，$\vec{S}$ は三つの独立な実対称 $n \times n$ 行列，A は反対称 $n \times n$ 行列である．例えば，生成子を次のように書くこともできる:

$$\begin{aligned}
[T_{\mu jj}]^{kx}_{\ell y} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\, \delta_{jk}\delta_{j\ell}\, [\sigma_\mu]_{xy} \quad (\, \mu = 1, \cdots, 3) \\
[T_{\mu ij}]^{kx}_{\ell y} &= \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{jk}\delta_{i\ell}\right) [\sigma_\mu]_{xy} \\
&\qquad (\, \mu = 1, \cdots, 3)\,, i \neq j \\
[T_{0ij}]^{kx}_{\ell y} &= \frac{i}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{j\ell} - \delta_{jk}\delta_{i\ell}\right) \delta_{xy}
\end{aligned} \tag{26.15}$$

複素共役表現は，下付きの添字を持ち

$$(T_a\, u)_\alpha = -[T_a]^\beta_\alpha\, u_\beta = -[T^*_a]^\alpha_\beta\, u_\beta \tag{26.16}$$

と変換する．しかし，この表現は擬実である．なぜなら，

$$-[R]^{\alpha\alpha'}\, [T^*_a]^{\beta'}_{\alpha'}\, [R^{-1}]_{\beta'\beta} = [T_a]^\alpha_\beta \tag{26.17}$$

だからである．ここに R は，

$$R^{jxky} = \delta_{jk}\, [\sigma_2]_{xy} \tag{26.18}$$

であり，反対称だから，表現は擬実である．直交群のところで見たように，R は二つの上付き添字を持つ不変テンソルであり，R^{-1} は二つの下付き添字を持

つ不変テンソルである(これらは，この場合偶々，同じ行列要素を持っている). それゆえ，我々は下付き添字を持ったテンソルを考える必要は決してない．いつも添字を上げて同じ情報を持つテンソルを得ることができるからである.

今やこのテンソル記法を用いて，既約表現を定義表現のテンソル積として分析することができる．肝心なのはテンソル解析が $SU(2n)$ と大変良く似ている点である．違いは不変テンソル R と R^{-1} が存在するため，下付き添字を取り除けることと，反対称添字を減らせることだけである．例えば，あらわには

$$u^\alpha v^\beta \tag{26.19}$$

のように書かれるテンソル積 $D^1 \otimes D^1$ を考えよう．対称な組み合わせ

$$S^{\alpha\beta} \equiv u^\alpha v^\beta + u^\beta v^\alpha \tag{26.20}$$

は，R を使ってさらに分解することは出来ないから，既約である．これは最高ウェイト $2\nu^1$ を持つ，よって，随伴表現である．成分の個数は正しいことに注意しよう:

$$\frac{2n(2n+1)}{2} = 3 \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \tag{26.21}$$

しかし反対称な組み合わせ

$$u^\alpha v^\beta - u^\beta v^\alpha \tag{26.22}$$

は，可約である．組み合わせ

$$O \equiv [R^{-1}]_{\beta\alpha}\, u^\alpha v^\beta \tag{26.23}$$

が，ゼロでない 1 重項だからである．組み合わせ

$$A^{\alpha\beta} \equiv u^\alpha v^\beta - u^\beta v^\alpha - \frac{1}{n}\,[R]^{\alpha\beta}\,[R^{-1}]_{\beta'\alpha'}\, u^{\alpha'} v^{\beta'} \tag{26.24}$$

は，

$$[R^{-1}]_{\beta\alpha}\, A^{\alpha\beta} = 0 \tag{26.25}$$

を満たす．何故なら，

$$[R^{-1}]_{\beta\alpha}\, R^{\alpha\beta} = \mathrm{Tr}\Big(R^{-1}R\Big) = 2n \tag{26.26}$$

したがって，$A^{\alpha\beta}$ は既約表現 D^2 であり，我々は積を既約な組み合わせを用いて次のように書くことができる:

$$u^\alpha v^\beta = \frac{1}{2} S^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} A^{\alpha\beta} + \frac{1}{n} R^{\alpha\beta} O \tag{26.27}$$

これらの全てをテンソル積の記法であらわに見ておくことは，時には有用である．ここでの議論は，直交群のスピノール表現における我々の対称・反対称部分の扱いを思い出させた筈である．要点は，D^1 の生成子の行列が $D^1 \otimes \overline{D^1}$ の中に随伴表現がどう現れるのかを記述する不変テンソルを与える，ということである．しかしながら，このテンソルは上付き添字，下付き添字を一つずつ持っている．$D^1 \otimes D^1$ における不変テンソルを見つけるには，R を使って下付き添字を上げなければならない．すなわち，生成子に右から R を掛ければ，上付き添字を二つ持った対称行列が得られるはずである．実際これが正しいことは，R がテンソル積の記法では単に σ_2 であることに注意し，行列

$$\left(\vec{S} \cdot \vec{\sigma} + A\right) \sigma_2 \tag{26.28}$$

が，各項でテンソル積の二つの空間の因子が同じ対称性を持っているので，対称である，ということからわかる．同じ記法で，σ_2 自身が $D^1 \otimes \overline{D^1}$ で 1 重項であること，さらに D^2 が

$$\left(\vec{A}' \cdot \vec{\sigma} + S'\right) \sigma_2 \tag{26.29}$$

の形を持つこと，がわかる．ただし S' はトレースがゼロの制限が付いている．

問題

26.A.　生成子が $\vec{\sigma} \cdot \vec{S} + A$ の形になる定義表現において，その定義表現が基本表現 μ^1 であることを明白にするような Cartan 生成子の組を見つけよ．

26.B.　テンソル法を用いて，$Sp(6)$ における $D^1 \otimes D^2$ を求めよ．このテンソル積に現れる各既約表現の次元を求めよ．

第 27 章

半端物

27.1　例外代数と 8 元数

$SU(5)$ や $SO(10)$ 理論のようなおもしろい統一理論の追求は，自然と，例外リー代数の一つである E_6 に基づく興味ある理論へとつながる．例外代数は

$$a + \sum_{\alpha=1}^{7} b_\alpha i_\alpha \tag{27.1}$$

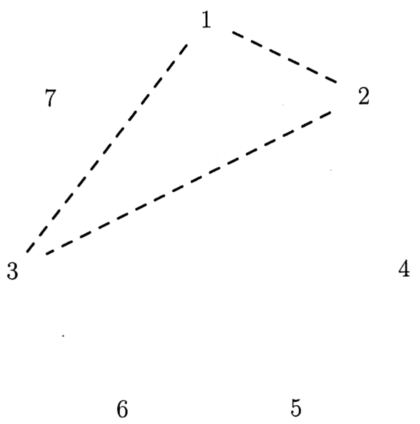
の形をした奇妙な対象の集合，**8 元数** (octonions) に付随している．ここに a, b_α $(\alpha = 1, \cdots, 7)$ は実数である．i_α は，七つの "虚数単位" の組で，i や 4 元数の $\vec{j}$ の一般化である．i_α は次の掛け算則を持つ:

$$i_\alpha i_\beta = -\delta_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta\gamma}\, i_\gamma \tag{27.2}$$

ただし $g_{\alpha\beta\gamma}$ は完全反対称である．ある基底をとれば，g は

$$\begin{aligned} g_{123} &= g_{247} = g_{451} = g_{562} \\ &= g_{634} = g_{375} = g_{716} = 1 \end{aligned} \tag{27.3}$$

そして他の成分は皆0もしくは(27.3)から反対称化で得られるものである．この掛け算則は次の図から得ることができる:



(27.4)

$g_{jk\ell}$が0でない七組の$\{jk\ell\}$は，添字の巡回順序を保ったまま点線の三角形を回転することで得られる．

代数(27.2)は，実数，複素数，4元数と，19章で議論した一つの良い性質を共有する．それは，積法則に従う絶対値を持つ多元体(division algebra)である．絶対値

$$|a + b_\alpha i_\alpha| \equiv \left(a^2 + b_\alpha^2\right)^{1/2} \tag{27.5}$$

は掛け算で保たれる．すなわち，A，Bが8元数のとき，

$$|AB| = |A||B|\,. \tag{27.6}$$

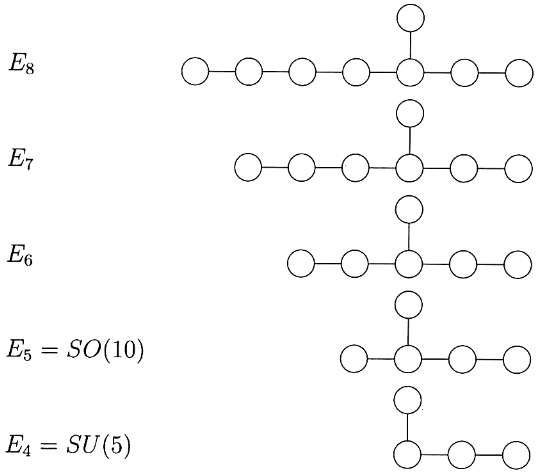
しかし，この8元数の掛け算は結合則を満たさない! 例えば，

$$(i_1 i_2)i_7 = i_3 i_7 = i_5\,, \qquad i_1(i_2 i_7) = i_1(-i_4) = -i_5\,. \tag{27.7}$$

結合則を満たさないので，8元数の行列は一般に群(その掛け算則は結合則を満たす)を成さない．しかしながら，8元数は例外代数ともう少し間接的に関係している．たとえば，G_2は，(27.2)に現れる対象$g_{\alpha\beta\gamma}$を不変に保つ$SO(7)$の部分群である．

27.2 E_6 統一理論

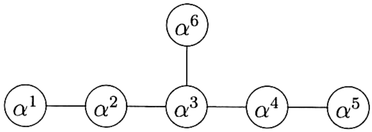
E_6 に戻ろう．まず，E_8 から $E_8 \to E_7$ そして $E_7 \to E_6$ へと行くときには，次に示すように，Dynkin 図形の左の枝から丸を一つずつ取り除くことに注意する．



(27.8)

同じ系列を続ければ，$E_5 = SO(10)$ であり，$E_4 = SU(5)$ である．E_4 と E_5 が共に意味のある統一理論を与えることから，E_6 も調べる価値がある．もちろん，この議論は単なる示唆であって，E_7 や E_8 は統一理論の群としては有用でないことがわかる．しかし，E_6 は実際おもしろいということがわかる．

ルート系といくつかの基本表現を考察する事から始めよう．ルートを次のようにラベルする:

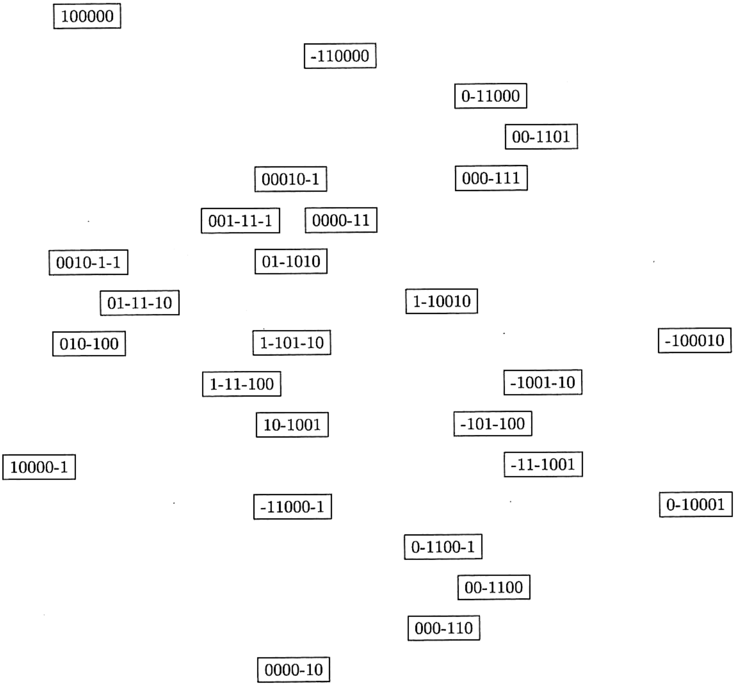


(27.9)

そうすると Cartan 行列は，

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{27.10}$$

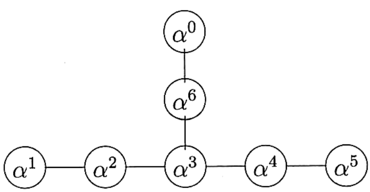
我々は，これからDynkin係数を使ってD^1表現のウェイトを構成することができる．結果は次のようになる (線は描くと多すぎるのですべて省略する):



(27.11)

ここには27個のウェイトがある．これは少々複雑に見えるが，一つ明らかなことがある．これは，ウェイト空間で原点に関して対称ではないので，複素表現である．この対象の構造を我々がもっと良く知っているもので理解するため，E_6の二つの極大正則部分代数$SU(3) \times SU(3) \times SU(3)$および$SU(6) \times SU(2)$の下でこの表現がどう変換するのかを見てみよう．これは拡大Dynkin図形を考え，部分代数の下での27のDynkin係数を求めることにより行うことができる．

拡大Dynkin図形は



(27.12)

で与えられ，(20.15)-(a) から，

$$\alpha^0 + \alpha^1 + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 + 2\alpha^4 + \alpha^5 + 2\alpha^6 = 0 \tag{27.13}$$

がしたがう．それゆえ我々はルート α^0 に対するウェイト μ の Dynkin 係数

$$\ell^0 = \frac{2\alpha^0 \cdot \mu}{{\alpha^0}^2} \tag{27.14}$$

を，六つの係数の線形結合として計算することができる:

$$\ell^0 = -\ell^1 - 2\ell^2 - 3\ell^3 - 2\ell^4 - \ell^5 - 2\ell^6 \tag{27.15}$$

結果は以下に示す．ただし最後の欄は ℓ^0 である．

100000-1

-110000-1

0-11000-1

00-1101-1

00010-10　000-111-1

001-11-10　0000-11-1

0010-1-10　01-10100

01-11-100　1-100100

010-1000　1-101-100　-1000100

1-11-1000　-1001-100

10-10010　-101-1000

10000-11　-11-10010

-11000-11　0-100010

0-1100-11

00-11001

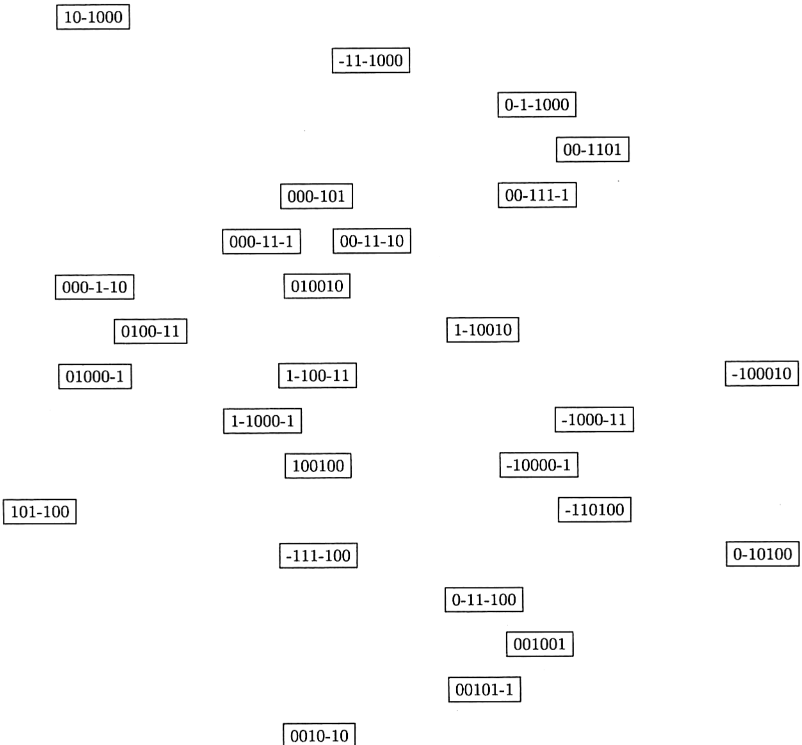
000-1101

0000-101

(27.16)

ここで正則極大部分代数を得るため一つのルートを取り除けば，(27.16) から取り除かれたルートに対応する Dynkin 係数を単に消去するだけで良い．残った

ものが部分代数の Dynkin 係数である．以下に，$SU(3) \times SU(3) \times SU(3)$ を得るためルート α^3 を取り除いた場合の結果を示す．残っている係数も 120654 の順で書いた．三つの $SU(3)$ 因子の各々において二つのルートが一緒に現れ，拡大 Dynkin 図形の外側のルートが初めに現れるように，こう書くのである．



(27.17)

これらは，9 個ずつのウェイト三組にまとめられる:

$$\boxed{\{10,\ \text{-}11,\ 0\text{-}1\}\{01,\ 1\text{-}1,\ \text{-}10\}00}\ ,\ \boxed{\{01,\ 1\text{-}1,\ \text{-}10\}00\{10,\ \text{-}11,\ 0\text{-}1\}}\ ,\quad \text{および}\ \boxed{00\{10,\ \text{-}11,\ 0\text{-}1\}\{01,\ 1\text{-}1,\ \text{-}10\}} \tag{27.18}$$

我々は，$\{10,\ -11,\ 0-1\}$ の組に $SU(3)$ の 3 表現の Dynkin 係数を認める．組 {01, 1-1, -10} は $\overline{3}$ である．かくして，27 は

$$27 \sim (3, \overline{3}, 1) \oplus (1, 3, \overline{3}) \oplus (\overline{3}, 1, 3) \tag{27.19}$$

のように変換する．

同様な議論により，α^6 を取り除けば，27 が $SU(6) \times SU(2)$ 部分群の下で

$$27 \sim (6,2) \oplus (\overline{15},1) \tag{27.20}$$

として変換することがわかる．ここで $\overline{15}$ は，四つの上付き (または下付き) 添字について反対称な，基本表現 D^4 である．

$SO(10)$ や $SU(5)$ は，正則だが極大ではない E_6 の部分代数であることに注意したい．我々が既に見てきたことから読者はおそらく，27 が $SO(10)$ や $SU(5)$ の下でどう変換するのか推測できるだろう．しかし，(27.11) から最初の Dynkin 係数を消去することによって，$SO(10)$ の下での変換則が

$$27 \sim 16 \oplus 10 \oplus 1 \tag{27.21}$$

となることは容易に確かめられる．ここで 16 は D^5 であり，$SU(5)$ の下での変換則は

$$27 \sim 5 \oplus \overline{10} \oplus 1 \oplus 5 \oplus \overline{5} \oplus 1 \tag{27.22}$$

(27.21) と (27.22) から，$SO(10)$ が $SU(5)$ と関連していたのと同じくらい，E_6 統一理論が $SO(10)$ と非常に関連していることが読み取れる．E_6 の 27 は，$SO(10)$ の複素表現 16 以外に，実表現を含んでいるが，それらには対称性の自発的破れによって大きな質量を与えることができる．

27.3　E_6 の破れ

E_6 統一理論の特徴の一つは，物質粒子が属している 27 表現が，$SO(10)$ 10 の中に $SU(2)$ 2 重項をも含んでいることである．それは低エネルギーで $SU(2) \times U(1)$ の破れを引き起こすこともできる表現である．ここで次のような群論の疑問が起こるかも知れない．27 として変換する Higgs 場だけで，E_6 対称性を低エネルギーの $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ まで完全に破ることができるか?　これに対する答えは (27.22) からわかる．二つの $SU(5)$ 1 重項の方向に真空値を持つ 27 Higgs 場 (達) があれば，対称性は $SU(5)$ まで破れる．しかし，27 には他に $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 1 重項成分がない．$SU(5)$ の 10，5，$\overline{5}$ のどれも $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 1 重項成分を持たないからである．したがって，27 のど

の成分も，$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ を保存するものは皆 $SU(5)$ も保存する．何か他のものが必要である．ここでは証明無しに，さらなる破れは 78 次元随伴表現の Higgs 場によって与えることができる，とだけ言っておこう．

27.4 $SU(3) \times SU(3) \times SU(3)$ 統一理論

ついでながら，$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 対称性が実際 E_6 の $SU(3) \times SU(3) \times SU(3)$ 部分群に完全に含まれている，ということは特筆に値する．さらに，(27.19) からわかるように，E_6 の 27 の変換性が三つの $SU(3)$ 因子の巡回置換の下で不変であることに注意したい．この巡回対称性は，E_6 代数の**内部**自己同型であり，したがって，E_6 の離散的部分群である．それは E_6 の拡大 Dynkin 図形 (27.12) の対称性に関連している．しかし，それは，Dynkin 図形の対称性ではないから，外部自己同型ではなく内部自己同型である．

$SU(3) \times SU(3) \times SU(3)$ は単純群ではないが，離散的な巡回対称性を追加しておけば，統一理論としての多くの性質を持ちうる．27 は，この連続および離散対称性の組み合わせの下で既約である．この模型では，27 で変換する Higgs 場によって対称性の破れを完全に起こすことができる．

27.5 アノマリー

統一理論に対して，(これらの理論が定式化されている数学的言葉である) 量子場の理論の構造から従うある奇妙な制限が課される．この制限というのは，すべての右手型スピン 1/2 粒子に対する生成演算子が行列 T_a^R により生成される表現に従って変換するとしたとき，T_a^R は

$$\mathrm{Tr}\Big(\{T_a^R, T_b^R\}\, T_c^R\Big) = 0\,. \tag{27.23}$$

を満たさねばならない，というものである．

三つの生成子のこの対称トレースは，$SU(N)$, $N \geq 3$ (および $SU(4)$ に等価な $SO(6)$) 以外のすべての単純リー代数に対して 0 になることを示すことができる．$SU(N)$ において，T_a^D を $SU(N)$ の D 表現における生成子としよう．そして，定義表現 D^1 に対して，不変テンソル d^{abc} を次のように定義する:

$$\mathrm{Tr}\Big(\{T_a^{D^1}, T_b^{D^1}\}\, T_c^{D^1}\Big) \equiv d^{abc} \tag{27.24}$$

そうすると，任意の表現に対して

$$\mathrm{Tr}\Big(\{T_a^D, T_b^D\}\, T_c^D\Big) = A(D)\, d^{abc}\,, \tag{27.25}$$

の形になることが示せる．ここで $A(D)$ は表現 D の**アノマリー** (anomaly) と呼ばれる整数である．したがって，(27.23) は右手型粒子に対する生成演算子が統一群のアノマリーのない表現に従って変換すべしとの言明である．

読者は $A(D)$ の次の性質を容易に導けるだろう (問題 27.C 参照):

$$A(\overline{D}) = -A(D) \tag{27.26}$$

$$A(D_1 \oplus D_2) = A(D_1) + A(D_2) \tag{27.27}$$

$$A(D_1 \otimes D_2) = \dim(D_1)\, A(D_2) + \dim(D_2)\, A(D_1) \tag{27.28}$$

$SU(5)$，あるいは $SU(2)\times U(1)$ に対して，10 のアノマリーは 5 のアノマリーと同じであるので (問題 27.B 参照)，$5 \oplus \overline{10}$ はアノマリーを持たない．これは，ひいては，1 世代分の右手型粒子の表現 (18.12) が $SU(2)\times U(1)$ の下でアノマリーを持たないことを意味する．何故なら，この表現における $SU(2)\times U(1)$ の生成子は，$5 \oplus \overline{10}$ における $SU(5)$ 生成子の単に部分集合だからである．

問題

27.A.　$SU(3)$ の表現 6 および 10 に対して $A(D)$ を求めよ．

27.B.　$SU(n)$ の基本表現たちに対するアノマリーは，$SU(3)$ 部分代数 (その下で，$SU(n)$ の n が 一つの 3 と $n-3$ 個の 1 重項 になるもの) のアノマリーを計算することによって求めることができる．これを使って，$SU(5)$ の 10 のアノマリーが 5 のアノマリーと同じであることを示せ．

27.C.　(27.27) と (27.28) を証明せよ．

エピローグ

リー代数，物理学，そして数学

私は，読者がこの本の最後まで到達して，リー代数の数学とその素粒子物理学への応用に対する評価が一層高まったことを期待している．この数学は宝石 —— いつも鑑賞すべき水晶のような宝物，である．しかし，それが適用される物理学は，そんなに純粋で永遠に美しいものではない．物理では，数学と違って，我々は常に相反する方向へ引っ張られている．一方の極では，統一と単純さと優雅さがある —— 数学により作られ，数学を作ったプラトンの自然の理想像である．他方の極には，この特定の世界の驚くべき混沌がある —— 乱雑で，偶発的で，そしてその豊かさを探る我々の実験的能力と共に絶えず進化する世界である．良い物理学は，この両方の対極地を取り込まねばならない．それこそが物理を非常におもしろいものにするのである!

訳者あとがき

訳者が未だ教養の学生だった頃，将来物理をやるには群論が必要だというので，ポントリャーギンの「連続群論」を非常に苦労して読んだことがある．実のところ，大変忍耐強く何度もトライし直して読んだのだが，遂に上巻のみで挫折してしまった．結局その内容は消化不良ですぐに忘れてしまい，後に物理をやる際には全く役に立たなかった．ポントリャーギンの本は数学的には定評のある教科書であるが，やはり物理学者向きの本ではない．初めから選択が間違っていたのであるが，かと言って，当時他に日本語で読めるこの方面の教科書も見あたらなかった．

1961年以来Benjamin/Cummingsから出版されているFRONTIERS IN PHYSICSのシリーズは，物理学専攻の大学院生に多くの優れた講義ノートを提供し続けてきたものであり，このレベルの教科書の殆んどない我が国でも多くの愛読者がいる．本書 "Lie Algebra in Particle Physics" (H. Georgi 著) はこのシリーズの一巻として書かれたものであり，もとより数学者向けの本ではなく，物理学専攻の学生のためのリー代数の教科書である．著者のH. ジョージァイは，素粒子論の分野でS. グラショウと共に，SU(5) に基づくクオークとレプトンの大統一理論を初めて提唱した有名な物理学者である．この教科書には，彼がその大統一理論を打ち立てる苦闘の中から会得した，群論に関する "実用的" な知識がちりばめられている．

今でき上がった校正刷でもう一度この本を通読してみて,「あゝ，こういう教科書が自分の大学生の頃にもあったらなぁ」と改めて思う．例外群も含めた全ての単純リー代数に関して，物理における豊富な実例を上げながら解説してゆく手際は見事である．実例は，初等的量子力学系，原子核理論，そして殆んどは最近の素粒子物理学からのものであるが，その手法や知識は多分物理学一般に有用と思われる．この点を考慮して邦訳の題名を，"素粒子物理学における . . ." とはせず，あえて "物理学における . . ." とした．

内容は非常に簡潔に書かれていて，初等的量子力学を学習した学生なら容易に理解できるだろう．非常に“数学的”な学生には論理の粗さが気になると思われるが，それでも，リー代数全般を先ず概観したり，あるいはそれらが最新の物理学でどのように使われているのかを知るためだけでも勧められる本である．

———

ここまでは、実は本書第1版の和訳の際に付けた「訳者あとがき」であるが、第2版の翻訳を終えた今でも依然として妥当であり，訳者の言いたいことでもあるので再録しておいた．(もっとも原著出版社は，今はBenjamin/Cummingsではなく，Perseus Booksに変わっているが.)

第2版は，全部で27章ある章立ては第1版とほぼ完全に同じであるが，内容量は2倍くらいになっている．全ての章で増補改訂がなされ，さらに豊富な実例とより明快で詳しい説明が加えられた．とくに第1版では数ページで済まされていた，有限群，特に対称群（置換群）の表現と応用，に関して，それ自身の重要性とリー群への準備の意味から，40ページにわたり殆ど新たな書き下ろしとして加えられた．同じく，第1版では触れられていなかったDynkin係数を用いた表現の具体的構成法や，ニュートリノ振動の発見により大統一理論の群として近年より重要性を増してきた例外群E_6の表現なども，詳しい解説が書き加えられた．この第2版は,「簡潔さ・短さ」という第1版の魅力をいくぶんそこなった感があるかもしれない．しかし，それを補って余りあるほど，自己充足的で分かり易い教科書になった．

翻訳は原著の雰囲気を伝えるべくできる限り原文に忠実な訳を心掛けた．しかし明らかな誤植は訳者の責任で訂正しておいた．また幾分わかりにくいと思われる箇所には訳者注を加え読者の便宜をはかった.「奇妙な日本語」と認識しながら敢えて使ったのは，複数名詞であることを示す「たち」である．SU(2)たち，状態たち，X_aたち，等々．複数であることを特に明示したかった箇所であるので，読者の寛恕を願う次第である．

最後になったが，なかなか翻訳作業を進めない訳者を辛抱強く叱咤激励し，遂にこの形にまでして頂いた吉岡書店の吉岡誠氏に心から感謝したい．

2010年8月

九後　汰一郎

索 引

訳者略歴

九後　汰一郎（くご　たいちろう）
1971 年　京都大学理学部物理学科卒業
1976 年　京都大学理学博士
1977-78 年　Max-Planck-Institute für Physik und Astrophysik
（ミュンヒェン）研究員
1978 年　京都大学理学部助手
1981 年　京都大学理学部助教授
1993 年　京都大学理学部教授
2003 年　京都大学基礎物理学研究所教授
（所長 2003-2007 年）

物理学におけるリー代数（原著第 2 版）　（物理学叢書 107）

2010 年 10 月 15 日　第 1 刷発行

訳　者　九後　汰一郎
発行者　吉　岡　誠

〒 606-8825　京都市左京区田中門前町 87
株式会社　吉　岡　書　店
電話（075）781-4747/ 振替 01030-8-4624

ISBN978-4-8427-0357-2　印刷・製本（株）太洋社